Devoir maison n° 4

Problème 1

1. *Questions préliminaires*
   (a) Rappeler les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ et $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$.
   (c) Montrer que $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$.
   Indication : On pourra penser à utiliser la définition de la dérivée du sinus en 0 (taux d'accroissement).
2. Soit un réel $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = \cos(x)$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right),$$
   est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n et de x.
   (c) Montrer enfin que
   $$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(2x)}{2x}.$$
3. On définit deux suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ par $a_0 = 1$, $b_0 = \dfrac{1}{\cos(x)}$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0$ et $b_n > 0$.
   (b) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}\left(b_n - a_n\right).$$
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < b_n$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right).$$
   (e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(b_0 - a_0\right).$$
   (f) Montrer enfin que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ sont adjacentes.
   On notera ℓ leur limite commune.
   (g) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n = \frac{u_n}{(\cos(x))^2} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{u_n}{(\cos(x))^2},$$
   où $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite définie à la question 2.
   (h) En déduire la valeur de ℓ.
   (i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant b_n - \ell \leqslant b_n - a_n$.
   (j) **Bonus :** En utilisant la question précédente et la question 3.(f), montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} n^p \left(b_n - \ell\right) = 0.$$
   Peut-on dire que la suite $(b_n)_{n \geqslant 0}$ converge rapidement vers sa limite ?