

Corrigé du Devoir maison n° 3

Problème 1

1. $P^3 = I_3$. Ainsi, on a $P \times P^2 = I_3$ donc la matrice P est inversible d'inverse $P^{-1} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{P^{-1}AP = L}$.

3. (a) Montrons le résultat par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $P^{-1}A^nP = L^n$ ».

Initialisation ($n = 0$) :

$$L^0 = I \quad \text{et} \quad P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} L^{n+1} &= L^n \times L \\ &= P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^nIAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$L^n = P^{-1}A^nP.$$

(b) On a :

$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3. \end{aligned}$$

(c) Montrons le résultat par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$ ».

Initialisation ($n = 2$) On a $L^2 = (I + J)^2 = (I + J) \times (I + J) = I^2 + J + J + J^2 = I + 2J + J^2$.

Or $I + 2J + \frac{2(2-1)}{2}J^2 = I + 2J + J^2$. On a donc bien

$$L^2 = I + 2J + J^2.$$

Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} L^{n+1} &= L \times L^n \\ &= (I + J) \times \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 + J + nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \\ &= I + (n+1)J + \left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n}{2} \right) J^2 \quad \text{car } J^2 = 0_3 \\ &= I + (n+1)J + \frac{n(n+1)}{2}J^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$, à savoir :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

(d) On a :

$$\begin{aligned} L^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on vérifie que la formule obtenue donne bien I_3 et pour $n = 1$, on vérifie que la formule obtenue donne bien L .

(e) Dès lors :

$$\begin{aligned} A^n &= PL^nQ \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. (a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{u_n = 1}$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= X_{n+1}.
 \end{aligned}$$

(c) Montrons le résultat par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $X_n = A^{n-1}X_1$ » .

Initialisation ($n = 1$) :

$$A^0 X_1 = I X_1 = X_1$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= AX_n \\
 &= A \times A^{n-1} X_1 \\
 &= A^n X_1
 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$X_n = A^{n-1} X_1.$$

(d) On a :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= X_n = A^{n-1} X_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 4(n-1) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On a donc bien pour tout $n \geq 1$, $\boxed{v_n = 2n(n-1)}$ et $\boxed{w_n = 2n}$.

Exercice 1

1. Calculons cette somme double :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left((x_i y_j)^2 - 2x_i y_j x_j y_i + (x_j y_i)^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i x_j y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_j y_i)^2 \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 y_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \\
 &= 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2
 \end{aligned}$$

On a bien obtenu l'égalité demandée.

2. En tant que somme de nombres positifs ou nuls, $\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0 \right)$.

3. Les deux questions précédentes assurent que

$$2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \geq 0$$

En divisant par $2 > 0$, on a donc :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

Or ces deux nombres sont positifs, donc par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)}$$

On a donc bien montré l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$.