Corrigé du DM n° 3

Exercice 1

1.
$$(M-3I_2)(M-4I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

2. On développe l'expression $(M-3I_2)(M-4I_2)$. On obtient :
$$(M-3I_2)(M-4I_2) = M^2 - 4M - 3M + 12I_2.$$
On a donc
$$M^2 = 7M - 12I_2.$$

3. On note $\mathcal{P}(n)$: « $\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \exists b_n \in \mathbb{R}, \qquad M^n = a_n M + b_n I_2$ ».
Initialisation : ($n=0$) D'une part, $M^0 = I_2$ par convention. D'autre part, on a : $a_0 M + b_0 I_2$. On pose donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Ainsi a_0 et b_0 existent bien et on a la relation $M^0 = a_0 M + b_0 I_2$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= M(a_n M + b_n I_2) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= a_n M^2 + b_n M \\ &= a_n(7M - 12I_2) + b_n M \\ &= (7a_n + b_n)M - 12a_n I_2. \end{aligned}$$
On pose alors $a_{n+1} = 7a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -12a_n$. Ainsi a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis et on a la relation
$$M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_2.$$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n existent et sont définis par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $a_{n+1} = 7a_n + b_n$, $b_{n+1} = -7a_n$ et on a la relation : $M^n = a_n M + b_n I_2$.

4. Montrons que la suite $(u_n)_n$ est géométrique. On a pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3(7a_n + b_n) - 12a_n = 9a_n + 3b_n = 3(3a_n + b_n) = 3u_n.$$
Ainsi la suite est géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 3a_0 + b_0 = 1$.
On en déduit l'expression de u_n pour tout n : $u_n = 3^n$.
Montrons que la suite $(v_n)_n$ est géométrique. On a pour $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4(7a_n + b_n) - 12a_n = 16a_n + 4b_n = 4(4a_n + b_n) = 4v_n.$$
Ainsi la suite est géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4a_0 + b_0 = 1$.
On en déduit l'expression de v_n pour tout n : $u_n = 4^n$.
On a alors le système
$$\begin{cases} 3a_n + b_n = 3^n \\ 4a_n + b_n = 4^n \end{cases}$$
On le résout, on obtient : $a_n = 4^n - 3^n$ et $b_n = 3^n - 3(4^n - 3^n) = 4 \times 3^n - 3 \times 4^n$.

5. On a donc pour $n \in \mathbb{N}$:
$$M^n = (4^n - 3^n)M + (4 \times 3^n - 3 \times 4^n)I_2 = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2 \times 4^n & 2 \times 4^n - 2 \times 3^n \\ -3 \times 4^n + 3^{n+1} & 3 \times 4^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Posons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien :
$$A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_n - v_n \\ u_n + 2v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$
2. Posons $J = A - 3I_2$, on a :
$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
On a alors : $3I_2 + J = A$.
3. On calcule le produit et on obtient $J^2 = 0_2$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} J$ ».
Initialisation $(n = 1)$ On a :
$$3^1 I_2 + 1 \times 3^0 J = 3I_2 + J = A.$$
Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (3^n I_2 + n3^{n-1} J \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (3I_2 + J) \times (3^n I_2 + n3^{n-1} J \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 3^{n+1} I_2 + n3^n J + 3^n J + n3^{n-1} J^2 \\ &= 3^{n+1} I_2 + (n+1)3^n J \quad \text{car } J^2 = 0_2 \end{aligned}$$
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion La propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrons le résultat par récurrence, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ »
Initialisation $(n = 0)$ On a, par convention, $A^0 = I_2$ donc $A^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a, d'après la question 1. et l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion La propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} J = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n3^{n-1} & -n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & -n3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n + n3^{n-1} & -n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & -n3^{n-1} + 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}(n+3) & -n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & 3^{n-1}(3-n) \end{pmatrix}$$
On a donc :
$$A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} n+3 & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix}.$$
Il reste alors à calculer le produit matriciel, $A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, on a :
$$A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} n+3 & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}((n+3)u_0 - nv_0) \\ 3^{n-1}(nu_0 + (3-n)v_0) \end{pmatrix}.$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = 3^{n-1}((n+3)u_0 - nv_0) \quad \text{et} \quad v_n = 3^{n-1}(nu_0 + (3-n)v_0)$$
Pour $n = 0$, on a :
$$3^{n-1}((n+3)u_0 - nv_0) = u_0 \quad \text{et} \quad 3^{n-1}(nu_0 + (3-n)v_0) = v_0$$
L'expression est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *d'après ESCP 2012, voie T*

1. On vérifie facilement que pour I, les sommes des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne donnent toutes 1. Ainsi $I \in \mathcal{E}$ et on a $\boxed{s(I) = 1}$.
   On vérifie facilement que pour J, les sommes des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne donnent toutes 3. Ainsi $I \in \mathcal{E}$ et on a $\boxed{s(J) = 3}$.
2. On a :
$$K \in \mathcal{E} \iff 1 + a + b = -2 + 5 + 3 = a - 6 + 5 = 1 - 2 + a = a + 5 - 6 = b + 3 + 5$$
   On obtient alors le système :
$$\begin{cases} 1 + a + b = 6 \\ a - 1 = 6 \\ b + 8 = 6 \end{cases}$$
   On obtient alors : $a = 7$ et $b = -2$.
   Ainsi $\boxed{K \in \mathcal{E} \iff a = 7 \quad \text{et} \quad b = -2}$.
3. On a :
$$M \in \mathcal{E} \iff a + d + x = b + e + y = c + z + t = a + b + c = d + e + z = x + y + t$$
   On obtient alors le système suivant :
$$\begin{cases} a + d + x = a + b + c \\ b + e + y = a + b + c \\ d + e + z = a + b + c \\ c + z + t = a + b + c \\ x + y + t = a + b + c \end{cases}$$
   On a alors :
$$\begin{cases} x = b + c - d \\ y = a + c - e \\ z = a + b + c - d - e \\ t = a + b - z = a + b - (a + b + c - d - e) = d + e - c \end{cases}$$
   Ainsi $\boxed{M \in \mathcal{E} \iff x = b + c - d \quad \text{et} \quad y = a + c - e \quad \text{et} \quad z = a + b + c - d - e \quad \text{et} \quad t = d + e - c}$.
4. (a) On a :
$$AJ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad JA = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \end{pmatrix}$$

   (b) Raisonnons par double implication :
   ($\Rightarrow$) Supposons que $A \in \mathcal{E}$ alors :
$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3 = x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = x_3 + y_3 + z_3 = s(A)$$
   On a alors :
$$AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad JA = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix}$$
   On a donc $AJ = JA$.
   ($\Leftarrow$) Supposons que $AJ = JA$ alors d'après leurs expressions, cela signifie que :
$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 = z_1 + z_2 + z_3 \\ x_2 + y_2 + z_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 + y_3 + z_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$
   Cela équivaut à la définition de $A \in \mathcal{E}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{E}$, alors d'après les calculs précédents :

$$AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} = s(A)J.$$

5. (a) D'après la question 4.(b), $AB \in \mathcal{E} \iff ABJ = JAB$. Or, on a, pour $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} ABJ &= A(BJ) \\ &= A(JB) \quad \text{car } B \in \mathcal{E} \\ &= AJB \\ &= (AJ)B \\ &= (JA)B \quad \text{car } A \in \mathcal{E} \\ &= JAB \end{aligned}$$

On en conclut donc que $\boxed{AB \in \mathcal{E}}$.

(b) D'après la question 4.(c), pour toute matrice $A \in \mathcal{E}$, $AJ = s(A)J$.
Soit $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$, on a alors :

$$\begin{aligned} ABJ &= As(B)J \quad \text{car } B \in \mathcal{E} \\ &= s(B)AJ \quad \text{car } s(B) \in \mathbb{R} \\ &= s(B)s(A)J \quad \text{car } A \in \mathcal{E} \\ &= s(A)s(B)J \quad \text{car } s(A) \text{ et } s(B) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

De plus, comme $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$, $AB \in \mathcal{E}$ donc on a :

$$ABJ = s(AB)J.$$

On obtient alors : $s(AB)J = s(A)s(B)J$ soit $\boxed{s(AB) = s(A)s(J)}$.

6. (a) Soit $A \in \mathcal{E}$ alors $AJ = JA$ donc $J = A^{-1}JA$ (en multipliant à gauche par l'inverse) donc $JA^{-1} = A^{-1}J$ (en multipliant à droite par l'inverse). Ainsi $A^{-1} \in \mathcal{E}$ d'après l'équivalence montrée à la question 4.(b).

(b) Soit $A \in \mathcal{E}$ alors $A^{-1} \in \mathcal{E}$ et $AA^{-1} \in \mathcal{E}$, on a alors d'après la question 5.(b) :

$$s(AA^{-1}) = s(A)s(A^{-1}).$$

Or $s(AA^{-1}) = s(I) = 1$ ainsi $s(A)s(A^{-1}) = 1$ donc $\boxed{s(A) \neq 0}$ et on a $\boxed{s(A^{-1}) = \frac{1}{s(A)}}$

7. (a) On a, d'une part :$BJ = \frac{1}{3}s(A)J^2$ or $J^2 = 3J$ (il suffit de faire le calcul) donc $BJ = s(A)J$.
On a, d'autre part : $JB = J \times \frac{1}{3}s(A)J = \frac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J$.
On a donc $BJ = JB$ et donc $\boxed{B \in \mathcal{E}}$ d'après la question 4.(b).

(b) On a, d'une part :

$$\begin{aligned} BC &= B(A - B) = BA - B^2 \\ &= \frac{1}{3}s(A)JA - \frac{1}{3}s(A)J \times \frac{1}{3}s(A)J \\ &= \frac{1}{3}s(A)AJ - \frac{1}{9}(s(A))^2 J^2 \quad \text{car } A \in \mathcal{E} \\ &= \frac{1}{3}s(A)AJ - \frac{1}{9}(s(A))^2 \times 3J \\ &= \frac{1}{3}s(A)(AJ - s(A)J) \\ &= 0 \quad \text{car } A \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

On a, d'autre part :

$$\begin{aligned}
CB &= (A-B)B = AB - B^2 \\
&= A \times \frac{1}{3}s(A)J - \frac{1}{3}s(A)J \times \frac{1}{3}s(A)J \\
&= \frac{1}{3}s(A)AJ - \frac{1}{9}(s(A))^2 J^2 \\
&= \frac{1}{3}s(A)AJ - \frac{1}{9}(s(A))^2 \times 3J \\
&= \frac{1}{3}s(A)(AJ - s(A)J) \\
&= 0 \quad \text{car } A \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

(c) Montrons le résultat par récurrence et posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $(A-B)^n = A^n - B^n$ ».
Initialisation $(n=1)$ On a : $(A-B)^1 = A - B = A^1 - B^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
(A-B)^{n+1} &= (A-B)^n \times (A-B) \\
&= (A^n - B^n) \times (A-B) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (A^n - B^n)C \quad \text{par définition de } C \\
&= A^n C - B^n C \\
&= A^n C - B^{n-1}BC \\
&= A^n C - 0 \quad \text{car } BC = 0 \\
&= A^n (A-B) \\
&= A^{n+1} - A^n B \\
&= A^{n+1} - ((A-B)^n + B^n)B \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= A^{n+1} - C^n B - B^{n+1} \\
&= A^{n+1} - C^{n-1}CB - B^{n+1} \\
&= A^{n+1} - B^{n+1} \quad \text{car } CB = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion La propriété étant initialisée pour $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Montrons que $C \in \mathcal{F}$, on a, comme A et B appartiennent à $\mathcal{E}$:

$$CJ = (A-B)J = AJ - BJ = JA - JB = J(A-B) = JC.$$

Ainsi $C \in \mathcal{E}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
CJ &= AJ - BJ \\
&= s(A)J - s(B)J \\
&= (s(A) - s(B))\, J
\end{aligned}$$

Ainsi $s(C) = s(A) - s(B)$. On a de plus :

$$\begin{aligned}
BJ &= \frac{1}{3}s(A)J^2 \\
&= \frac{1}{3}s(A)3J \\
&= s(A)J
\end{aligned}$$

Ainsi $s(B) = s(A)$. On a donc en conclusion $s(C) = s(A) - s(B) = 0$ et $\boxed{C \in \mathcal{F}}$.

(e) Soit $A \in \mathcal{E}$, on a :

$$A = \frac{1}{3}s(A)J + A - \frac{1}{3}s(A)J$$

La matrice $\frac{1}{3}s(A)J$ est une matrice proportionnelle à J et la matrice $A - \frac{1}{3}s(A)J$ correspond à la matrice C de la question précédente et on a montré qu'elle appartenait à $\mathcal{F}$. On a donc le résultat demandé.