Devoir maison n° 3

Ce devoir maison est composé de trois exercices, vous devez en traiter (au moins) deux parmi les trois.

Exercice 1

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que :
$$(M - 3I_2)(M - 4I_2) = 0_2$$
2. Exprimer M^2 en fonction de M et de I_2.
3. Démontrer par récurrence sur n que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists a_n \in \mathbb{R} \qquad \exists b_n \in \mathbb{R} \qquad M^n = a_n M + b_n I_2$$
On a ainsi défini deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = a_n M + b_n I_2$.
4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = 3a_n + b_n \text{ et } v_n = 4a_n + b_n$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et en déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 2

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premiers termes u_0 et v_0 et par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
2. Montrer que A s'écrit sous la forme
$$A = 3I_2 + J,$$
où J est une matrice à déterminer.
3. Vérifier que $J^2 = 0$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} J.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
5. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 3

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3.$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.
2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$. Déterminer x, y, z, t en fonction de $a, b, c, d,\ e$ pour que M soit une matrice de $\mathcal{E}$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.
   (a) Calculer AJ et JA.
   (b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $AJ = JA$.
   (c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.
5. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)s(B)$.
6. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.
   (a) À l'aide de la question 4.(b), montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.
7. Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$. On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.
   (a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que : $BC = CB = 0$ (matrice nulle).
   (c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , la formule :
   $$(A - B)^n = A^n - B^n$$
   (d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?
   (e) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$.