

Corrigé du DM n° 2

Exercice 1 Questions indépendantes

1. La fonction g est de la forme $\sqrt{A}$. Pour que g soit bien définie, il faut que $A \geq 0$. Ainsi on résout l'inéquation suivante

$$|x+1| - 5 \geq 0 \Leftrightarrow |x+1| \geq 5 \Leftrightarrow x+1 \geq 5 \text{ ou } x+1 \leq -5 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ ou } x \leq -6.$$

Ainsi $\mathcal{D}_g =]-\infty; -6] \cup [4; +\infty[$.

2. On commence par déterminer le domaine de définition de l'équation noté $\mathcal{D}$. Pour $x \in \mathcal{D}$, il faut qu'il soit solution des 4 inéquations suivantes.

$$5x - 3 > 0, \quad 3x - 2 > 0, \quad x - 1 > 0, \quad 2x + 1 > 0.$$

Ainsi $\mathcal{D} =]1; +\infty[$.

On regroupe ensuite les logarithmes ensemble de chaque côté. On obtient :

$$\ln((5x-3)(3x-2)) = \ln((x-1)(2x+1)).$$

Cette équation est équivalente à :

$$(5x-3)(3x-2) = (x-1)(2x+1).$$

On a alors :

$$15x^2 - 10x - 9x + 6 = 2x^2 + x - 2x - 1 \Leftrightarrow 13x^2 - 18x + 7 = 0.$$

On calcule le discriminant de ce polynôme de degré 2, on obtient $\Delta = -40 < 0$. Ainsi $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. Le domaine de cette inéquation est $\mathbb{R}$. On a :

$$e^{x^2-3x} \leq e^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 - 3x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0.$$

On dresse le tableau de signes de ce polynôme de degré 2.

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
x^2-3x-3	+	0	-	0	+

$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right].$$

Problème 1

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $g'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$.

Ainsi la fonction g est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

- (b) La fonction g étant décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, elle atteint son minimum pour $x = 0$. Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$. Ainsi la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$.

- (c) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty$. Nous sommes donc a priori devant une forme indéterminée. Factorisons par le terme prépondérant :

$$g(x) = e^x \left(x - 1 + \frac{1}{e^x} \right).$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1}{e^x} = +\infty$ ainsi par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

2. (a) La fonction f est de la forme $\ln(u)$. Pour qu'elle soit définie, il faut que $u > 0$, c'est à dire qu'il faut $\frac{e^x - 1}{x} > 0$.
Etablissons le tableau de signe de ce quotient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$
$\frac{e^x - 1}{x}$	$+$		$+$

On en déduit que $\frac{e^x - 1}{x} > 0 \iff x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

- (b) **Etudions la limite de f au voisinage de $+\infty$.**

On a pour $x \neq 0$, $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$, or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$. De plus, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par composée de limites, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Etudions la limite de f au voisinage de $-\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$. Ainsi par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, on en conclut, par composée de limites que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Etudions la limite de f au voisinage de 0 .

A priori, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée mais on peut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ en utilisant les taux d'accroissement. En effet,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0. La fonction $\exp$ est dérivable en 0 donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1.$$

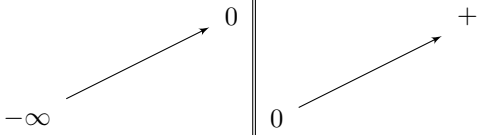
De plus, $\ln(1) = 0$ donc par composée de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- (c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de plus $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.

Dérivons la fonction f . Elle est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. On a pour $x \in \mathbb{R}^*$, $u'(x) = \frac{e^x \times x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{g(x)}{x^2} \times \frac{x}{e^x - 1} = \frac{g(x)}{x(e^x - 1)}.$$

Etudions le signe de ce quotient et déduisons-en les variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$
$x(e^x - 1)$	$+$		$+$
$g(x)$	$+$		
$f'(x)$	$+$		$+$
Variations de f			
Signe de $f(x)$	$-$		$+$

(d) Soit $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln(e^x) \\
 &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{xe^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x \times x}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = f(-x).
 \end{aligned}$$

Pour $x \in]-\infty; 0[$, $-x > 0$ donc $f(-x) > 0$ ainsi $f(x) - x > 0$.

Pour $x \in]0; +\infty[$, $-x < 0$ donc $f(-x) < 0$ ainsi $f(x) - x < 0$.

(a) Montrons le résultat par récurrence. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation ($n = 0$) On a $u_0 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On sait par hypothèse de récurrence que $u_n > 0$ or $f(x) > 0$ pour $x > 0$ d'après la question 2.(c). Ainsi $u_{n+1} = f(u_n) > 0$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question 2.(d) :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = f(-u_n).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $-u_n < 0$ et $f(-u_n) < 0$ d'après la question 2.(c).. Ainsi $u_{n+1} < u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(c) D'après les deux questions précédentes, on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers $\ell \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 0$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. Ainsi par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. On obtient donc l'équation :

$$\ln\left(\frac{e^\ell - 1}{\ell}\right) = \ell \iff \frac{e^\ell - 1}{\ell} = e^\ell \iff \ell e^\ell - e^\ell + 1 = 0 \iff g(\ell) = 0.$$

Absurde car $g(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ d'après la question 1.(b). On en déduit donc que $\boxed{\ell = 0}$.

Problème 2 *Adapté d'Ecricome 2015, voie S*

1. (a) i. On calcule $P(1)$ et on obtient $P(1) = 0$ ainsi 1 est une racine de P .
 ii. On cherche trois réels a , b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. On a :

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - (ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Identifions coefficients par coefficients avec ceux de P , on obtient :

$$a = 2, \quad b - a = -3, \quad c - b = 0, \quad -c = 1.$$

On obtient $a = 2$, $c = -1$ et $b = -1$. On a alors :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(2x^2 - x - 1).$$

- iii. On peut factoriser le polynôme $2x^2 - x - 1$.

Les racines de $2x^2 - x - 1$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$ de sorte que $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Et donc

$$P(x) = 2(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

- (b) La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tan$ est dérivable sur I , donc f est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables. Puisque $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction u est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I . On a alors

$$\forall x \in I, \quad u'(x) = \frac{1}{3} \left(2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) - 1 = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{3 \cos^2 x} = \frac{P(\cos x)}{3 \cos^2 x}.$$

- (c) Pour $x \in I$, $\cos(x) \in]0, 1[$, et donc $P(\cos(x)) \geq 0$. Par conséquent, $u'(x) \geq 0$ sur I , et donc u est croissante sur I .
 (d) La fonction v est dérivable sur I comme somme et quotient de fonctions dérivables sur I , avec $\forall x \in I$, $2 + \cos(x) \neq 0$. On a alors pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} v'(x) &= 1 - \frac{3 \cos(x)(2 + \cos(x)) + 3 \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{(2 + \cos(x))^2 - 6 \cos(x) - 3 \cos^2(x) - 3(1 - \cos^2(x))}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{1 - 2 \cos(x) + \cos^2(x)}{(2 + \cos(x))^2}. \end{aligned}$$

Si on pose $Q(x) = x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}_2[x]$, alors $\forall x \in I$, $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}$.

- (e) On a $Q(x) = (x-1)^2$, de sorte que $\forall x \in I$, $Q(\cos(x)) > 0$, car $\cos(x) \neq 1$ puisque $x \neq 0$ sur I .
 Donc v' est strictement positive sur I , et donc v est strictement croissante sur I .
 (f) On a $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$, et u est croissante strictement sur I de sorte que

$$\forall x \in I, \quad u(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x.$$

De même, v est strictement croissante sur I et $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$, de sorte que

$$\forall x \in I, \quad v(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) < x.$$

Ainsi, en associant les deux inégalités précédentes, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).}$$

2. (a) On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$. De même,

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ainsi $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$. On en déduit que, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ainsi $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}}$.

(b) De la question 1.(f), on déduit que

$$g\left(\frac{\pi}{12}\right) < \frac{\pi}{12} < f\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

soit

$$\frac{3(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} < \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + 2 - \sqrt{3} \right)$$

et donc, on obtient l'encadrement de π suivant :

$$\boxed{36 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} < \pi < 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{3}}$$

3. (a) Pour tout réel θ , on a

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2a_{n+1}^2.$$

Soit encore $a_{n+1}^2 = \frac{1 - b_n}{2}$. Mais $0 \leq \frac{\pi}{3 \times 2^n} \leq \frac{\pi}{2}$, de sorte que $a_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) \geq 0$ et donc

$$\boxed{a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}}}$$

De plus, on a $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 1$ soit

$$b_{n+1}^2 = 1 - a_{n+1}^2 = 1 - \frac{1 - b_n}{2} = \frac{1 + b_n}{2}.$$

Mais $b_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \geq 0$ car $0 \leq \frac{\pi}{3 \times 2^n} \leq \pi$ et donc

$$\boxed{b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}}$$

(b) En utilisant le résultat de la question 1.(f) avec $x = \frac{\pi}{3 \times 2^n} \in I$ (d'après ce qu'on a dit en 3.(a)), on a, pour tout entier naturel n ,

$$g\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < f\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

soit

$$\boxed{3 \frac{a_n}{2 + b_n} < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right) \iff 9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right)}.$$

(c) i. On remarque que pour $t \neq 0$,

$$\frac{\sin(t)}{t} = \frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction $\sin$ en 0. Or la fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1}.$

ii. On remarque que :

$$9 \times 2^n \times \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3\pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)}{\frac{\pi}{3 \times 2^n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3 \times 2^n} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ donc par composée de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)}{\frac{\pi}{3 \times 2^n}} = 1.$$

On conclut par produit de limites que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \times 2^n \times \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3\pi}.$

iii. D'après ce qui précède, on a que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \times 2^n \times a_n = 3\pi.$$

De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3 \times 2^n} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = 1$, on a par composée de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + b_n = 3$. On en déduit par produit de limites que, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} = \frac{3\pi}{3} = \pi}.$

iv. Calculons maintenant la limite du terme $2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$.

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \times 2^n \times a_n = 3\pi$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 2^n a_n = \frac{2}{9} \times 3\pi = \frac{2\pi}{3}$ et que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n a_n = \frac{1}{9} \times 3\pi = \frac{\pi}{3}$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$ donc par opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 2^n \times a_n + \frac{2^n \times a_n}{b_n} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi.$$

On obtient bien donc que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = \pi}.$