Corrigé du DM n° 2

Exercice 1

1. **Domaine de définition**
La fonction $x \mapsto x^2 - 3x - 4$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On commence donc par chercher les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - 3x - 4 > 0$.
On calcule le discriminant $\Delta = 25$ et les racines $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$. On a alors :
$$x^2 - 3x - 4 > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[.$$
La fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 3x - 4)$ est donc définie sur $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. On chercher donc les réels x tels que $\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0$. On a alors :
$$\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 3 \iff x \geqslant \ln(3).$$
Ainsi $x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - 3}$ est définie pour $x \in [\ln(3), +\infty[$ et s'annule pour $x = \ln(3)$.
On en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 3}}$ est définie sur $]\ln(3), +\infty[$.
Il reste à comparer $\ln(3)$ et 4 pour finaliser notre étude. On sait que $\ln(\mathrm{e}) = 1$ et que $\mathrm{e} \simeq 2,7$. Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante, on en déduit que $\ln(3) > 1$. De plus, $3 < \mathrm{e}^2$ et $\ln(\mathrm{e}^2) = 2\ln(\mathrm{e}) = 2$ donc $1 < \ln(3) < 2$. Ainsi $\ln(3) < 4$.
En conclusion, la fonction f est définie sur $\boxed{]4, +\infty[}$.

2. **Logarithme et exponentielle**

(a)
$$\begin{aligned}
A &= 5\ln\left(\frac{3^2}{3\times 5}\right) - 4\ln\left(\frac{3}{5^2}\right) + 8\ln\left(\frac{5}{3^2}\right)\\
&= 5(\ln(3) - \ln(5)) - 4(\ln(3) - 2\ln(5)) + 8(\ln(5) - 2\ln(3))\\
&= 5\ln(3) - 5\ln(5) - 4\ln(3) + 8\ln(5) + 8\ln(5) - 16\ln(3)\\
&= -15\ln(3) + 11\ln(5).
\end{aligned}$$
On a donc $\boxed{A = -15\ln(3) + 11\ln(5)}$.

(b)
$$\begin{aligned}
B &= \ln\left(\frac{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}{4}\right)\\
&= \ln\left(\frac{7-4}{4}\right)\\
&= \ln(3) - 2\ln(2).
\end{aligned}$$
On a donc $\boxed{B = \ln(3) - 2\ln(2)}$.

(c)
$$C = \left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^3 = 2^3 = 8.$$
On a donc $\boxed{C = 8}$.

(d)

$$\begin{aligned} D &= x^3 + 2x - \left(\mathrm{e}^{ln(x)}\right)^3 + 0 \\ &= x^3 + 2x - x^3 \\ &= 2x. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{D = 2x}$.

(e) L'équation est définie sur $]3, +\infty[$. On la résout donc sur ce domaine. Soit $x \in]3, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln(x-3) + \ln(x+1) = 3\ln 2 &\iff \ln((x-3)(x+1)) = \ln(8) \\ &\iff (x-3)(x+1) = 8 \\ &\iff x^2 - 3x + x - 3 = 8 \\ &\iff x^2 - 2x - 11 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-11) = 48$. Les solutions de l'équation sont donc

$$x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + 2\sqrt{3}$$

Or, on a $1 - 2\sqrt{3} < 3$ et $1 + 2\sqrt{3} > 3$ donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \{1 + 2\sqrt{3}\}.}$$

Problème 1

1. Calculons $\operatorname{ch}(0)$ et $\operatorname{sh}(0)$:
$\operatorname{ch}(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $\operatorname{sh}(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

2. Étudions la parité des fonctions ch et sh :
   - $\mathscr{D}_{\mathrm{ch}} = \mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à zéro. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors :

   $$\operatorname{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

   donc $\boxed{\text{la fonction ch est paire}}$
   - $\mathscr{D}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à zéro. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors :

   $$\operatorname{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = \frac{-(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x})}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(x)$$

   donc $\boxed{\text{la fonction } \operatorname{sh} \text{ est impaire}}$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(x) = 0$:
Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) = 0 &\iff \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff x = -x \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}.}$

4. (a) Montrons l'équivalence de l'énoncé :
Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) = 2 &\iff \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 2 \\ &\iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 4 \\ &\iff \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) = 4\mathrm{e}^{x} \qquad \text{car} \quad \mathrm{e}^{x} \neq 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} + 1 = 4\mathrm{e}^{x} \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 1 = 0 \end{aligned}$$

(b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$. L'astuce va être d'utiliser l'équivalence précédente et d'effectuer le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = 2 &\iff \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 1 = 0 \\ &\iff (X = \mathrm{e}^x \text{ et } X^2 - 4X + 1 = 0) \end{aligned}$$

Résolvons l'équation $X^2 - 4X + 1 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$ donc l'équation $X^2 - 4X + 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $X_1 = \dfrac{4 - \sqrt{12}}{2} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $X_2 = \dfrac{4 + \sqrt{12}}{2} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$. Par suite, on a les équivalences suivantes (on remarque que $2 - \sqrt{3} > 0$)

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = 2 &\iff \mathrm{e}^x = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } \mathrm{e}^x = 2 + \sqrt{3} \\ &\iff x = \ln(2 - \sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Bilan : L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S} = \{\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})\}.}$

5. (a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) > 0$:

Soit x dans $\mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ et que $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$ et donc $\boxed{\mathrm{ch}(x) > 0}$.

(b) Calculons $\mathrm{sh}'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$:

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) > 0$ d'après la question 6.(a).

Par suite, la fonction sh est $\boxed{\text{strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

6. (a) Montrons l'équivalence : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(x) > 0 \iff x > 0$:

D'après ce qui précède, la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$ donc le tableau de signes de la fonction sh est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

Donc on a bien l'équivalence : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(x) > 0 \iff x > 0$.

(b) Étudions les variations de la fonction ch :

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$.

Or, d'après la question 6.(a), on sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(x) > 0 \iff x > 0$.

Donc la fonction ch est $\boxed{\text{strictement décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ puis strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

7. Dressons le tableau de variations de la fonction ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de ch		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Dressons le tableau de variations de la fonction sh :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$		$+$	
Variations de sh		$\nearrow$	

8. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2 &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1.\end{aligned}$$
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2 = 1}$.
9. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$:
Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{e}^{-x} > 0.$
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)}$
10. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \leqslant 0,01$:
Soit x dans $\mathbb{R}$. On vient de montrer que $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Par suite :
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \leqslant 0,01 &\iff e^{-x} \leqslant 0,01 \\ &\iff -x \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff x \geqslant -\ln(0,01)\end{aligned}$$
Or, $-\ln(0,01) = -\ln\left(\dfrac{1}{100}\right) = \ln(100)$ donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = [\ln(100); +\infty[.}$
11. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}$$
(a) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f :
$$\begin{aligned}x \notin \mathcal{D}_f &\iff \mathrm{sh}(x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{d'après la question 3.}\end{aligned}$$
donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$
(b) Étudions la parité de la fonction f :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est bien symétrique par rapport à zéro. Soit x dans $\mathbb{R}_*$. Alors :
$$f(-x) = \frac{-x}{\mathrm{sh}(-x)} = \frac{-x}{-\mathrm{sh}(x)} = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = f(x)$$
donc la fonction f est $\boxed{\text{paire}}$.
(c) Calculons $f'(x)$:
Soit x dans $\mathbb{R}_*$. Nous avons vu précédemment que $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$. Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{sh}(x)$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{ch}(x)$. Par suite, $f(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{1 \times \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}.}$
(d) Étudions les variations de la fonction g :
La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$:
$$g'(x) = \mathrm{ch}(x) - (\mathrm{ch}(x) + x\mathrm{sh}(x)) = -x\mathrm{sh}(x)$$
Or, d'après la question 7.(a), nous savons que $\mathrm{sh}(x)$ est du signe de x, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

Ainsi, la fonction g est $\boxed{\text{strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$.

(e) Dressons le tableau de variations de la fonction f :

D'après la question 11.(c) : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Or, d'après la question précédente, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $g(0) = 0$ donc le tableau de signes de la fonction g est donné par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
f		↗	‖	↘	

Exercice 2

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction constante f égale à c. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est continue en 0 et en 1 . Soit $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x^2\right) = c = f(x)$. Ainsi, les fonctions constantes sont $\boxed{\text{solutions du problème posé}}$.
2. Soit $f \in E$.

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien un domaine symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f\left((-x)^2\right) = f\left(x^2\right) = f(x)$ puisque f vérifie $(\star)$. Ainsi, la fonction f est $\boxed{\text{paire}}$.

(b) Soit $x \in [0,1[$

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a $f\left(x^{2^0}\right) = f\left(x^1\right) = f(x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a alors

$$\begin{aligned} f\left(x^{2^{n+1}}\right) &= f\left(\left(x^{2^n}\right)^2\right) \\ &= f\left(x^{2^n}\right) \quad \text{d'après la relation } (\star) \\ &= f(x) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$.

ii. On a $x^{2^n} = \exp\left(2^n \ln(x)\right)$. Comme $x \in [0,1[$, on a $\ln(x) < 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n + \infty$ (car $2 > 1$), on a par produit de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \ln(x) = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc par composée de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{2^n} = 0$.
Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la limite et puisque f est continue en 0 , on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(x^{2^n}\right) = f(0).$$

Or, d'après la question précédente, $f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = f(x)$, d'après l'unicité de la limite, on a $\boxed{f(x) = f(0)}$.

(c) Soit $x \in [1, +\infty[$.

i. On a $f(\sqrt{x}) = f\left((\sqrt{x})^2\right) = f(x)$ d'après ($\star$). Donc $\boxed{f(\sqrt{x}) = f(x)}$.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a $f\left(x^{\frac{1}{2^0}}\right) = f\left(x^1\right) = f(x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a alors

$$f\left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = f\left(\sqrt{x^{\frac{1}{2^n}}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$$

en utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$.

iii. On a $x^{\frac{1}{2^n}} = \exp\left(\dfrac{1}{2^n}\ln(x)\right)$. Comme $2 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Comme $x \geqslant 1, \ln(x) \geqslant 0$ et donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\ln(x) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$.
Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, et puisque f est continue en 1 , on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = f(x)$. Par unicité de la limite, $\boxed{f(x) = f(1)}$.

(d) On a démontré en question 2.(b) que : $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = f(0)$ et en question 2.(c) que : $\forall x \in [1, +\infty]$, $f(x) = f(1)$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Mais, la fonction f est continue en 1 par hypothèse donc nécessairement $f(0) = f(1)$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = f(1)$ donc la fonction f est $\boxed{\text{constante sur } \mathbb{R}_+}$.

(e) La fonction f est paire d'après la question 2.(a) donc $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = f(-x) = f(1)$ d'après la question précédente et car $-x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, la fonction f est $\boxed{\text{constante sur } \mathbb{R}}$.

3. Dans cet exercice nous avons raisonné par analyse-synthèse.
Dans la question 2, nous avons démontré que les seules fonction pouvant être solutions du problème étaient les fonctions constantes (analyse).
Dans la question 1 , nous avons montré que les fonctions constantes étaient bien solutions du problème (synthèse).
Conclusion : Les seules solutions du problèmes sont les fonctions constantes.