

Devoir maison n° 2

Ce devoir maison est composé d'un exercice et d'un problème obligatoires ainsi que d'un exercice facultatif.

Exercice 1

1. Domaine de définition

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x - 4)}{\sqrt{e^x - 3}}$. Déterminer son domaine de définition.

2. Logarithme et exponentielle

(a) Exprimer $A = 5 \ln\left(\frac{9}{15}\right) - 4 \ln\left(\frac{3}{25}\right) + 8 \ln\left(\frac{5}{9}\right)$ en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$

(b) Simplifier l'expression $B = \ln\left(\frac{\sqrt{7}+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{7}-2}{2}\right)$.

(c) Simplifier l'expression $C = \exp(3 \ln(2))$.

(d) Simplifier l'expression $D = \ln(e^{x^3+2x}) - e^{3 \ln(x)} + \ln(1)$

(e) Résoudre l'équation suivante :

$$\ln(x-3) + \ln(x+1) = 3 \ln 2$$

Problème 1 *Etude de deux fonctions classiques*

On considère les fonctions ch (pour cosinus hyperbolique) et sh (pour sinus hyperbolique) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Calculer $\text{ch}(0)$ et $\text{sh}(0)$.

2. Étudier la parité des fonctions ch et sh .

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(x) = 0$.

4. (a) Montrer l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) = 2 \iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{ch}(x) = 2$.

5. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) > 0$$

(b) Calculer $\text{sh}'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de la fonction sh .

6. (a) Montrer l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sh}(x) > 0 \iff x > 0$$

(b) Étudier les variations de la fonction ch .

7. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ch et sh .

8. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 = 1.$$

9. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) > \text{sh}(x)$$

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \leq 0,01$$

11. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)}$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .

(b) Étudier la parité de la fonction f .

(c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$$

(d) Étudier les variations de la fonction $g : x \rightarrow \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)$.

(e) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 2 *Facultatif, pour ceux et celles qui veulent aller plus loin*

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x^2) = f(x).$$

1. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constante. Montrer que $f \in E$.

2. Soit à présent une fonction f de E .

(a) Montrer que f est paire.

(b) Soit $x \in [0, 1[$.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^{2^n}) = f(x)$.

ii. En déduire que $f(x) = f(0)$.

(c) Soit maintenant $x \in [1, +\infty[$.

i. Montrer que $f(\sqrt{x}) = f(x)$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$.

iii. En déduire que $f(x) = f(1)$.

(d) Déduire des questions précédentes que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.

(e) Montrer alors que f est constante.

3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?