Devoir maison n° 2

Ce devoir maison est composé d'un exercice et d'un problème obligatoires ainsi que d'un exercice facultatif.

Exercice 1

1. **Domaine de définition**
   Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 3}}$. Déterminer son domaine de définition.
2. **Logarithme et exponentielle**
   (a) Exprimer $A = 5\ln\left(\dfrac{9}{15}\right) - 4\ln\left(\dfrac{3}{25}\right) + 8\ln\left(\dfrac{5}{9}\right)$ en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$

   (b) Simplifier l'expression $B = \ln\left(\dfrac{\sqrt{7}+2}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{7}-2}{2}\right)$.

   (c) Simplifier l'expression $C = \exp(3\ln(2))$.

   (d) Simplifier l'expression $D = \ln\left(e^{x^3+2x}\right) - e^{3\ln(x)} + \ln(1)$

   (e) Résoudre l'équation suivante :
   $$\ln(x-3) + \ln(x+1) = 3\ln 2$$

Problème 1 *Etude de deux fonctions classiques*

On considère les fonctions ch (pour cosinus hyperbolique) et sh (pour sinus hyperbolique) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Calculer $\mathrm{ch}(0)$ et $\mathrm{sh}(0)$.
2. Étudier la parité des fonctions ch et sh.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{sh}(x) = 0$.
4. (a) Montrer l'équivalence :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) = 2 \iff \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 1 = 0$$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.
5. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) > 0$$
   (b) Calculer $\mathrm{sh}'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de la fonction sh.
6. (a) Montrer l'équivalence :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}(x) > 0 \iff x > 0$$
   (b) Étudier les variations de la fonction ch.
7. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ch et sh.
8. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2 = 1.$$
9. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$$

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \leqslant 0,01$$
11. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
   (b) Étudier la parité de la fonction f.
   (c) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}$$
   (d) Étudier les variations de la fonction $g : x \to \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)$.
   (e) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 2 *Facultatif, pour ceux et celles qui veulent aller plus loin*

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que
$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(x^2\right) = f(x).$$

1. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante. Montrer que $f \in E$.
2. Soit à présent une fonction f de E.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Soit $x \in [0, 1[$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$.
      ii. En déduire que $f(x) = f(0)$.
   (c) Soit maintenant $x \in [1, +\infty[$.
      i. Montrer que $f(\sqrt{x}) = f(x)$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$.
      iii. En déduire que $f(x) = f(1)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Montrer alors que f est constante.
3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?

