

Corrigé du DM n° 1

Exercice 1

1. Avec le changement d'indice $[j = k + 1]$ dans la première somme, on trouve

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^5 - \sum_{k=1}^n k^5 = \sum_{j=2}^{n+1} j^5 - \sum_{k=1}^n k^5 = \sum_{j=2}^n j^5 + (n+1)^5 - \sum_{k=2}^n k^5 - 1 = (n+1)^5 - 1.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\sum_{k=1}^n (k+1)^5 - \sum_{k=1}^n k^5 = (n+1)^5 - 1}.$

2. On rappelle à toutes fins utiles que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^5 - \sum_{k=1}^n k^5 &= \sum_{k=1}^n (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - \sum_{k=1}^n k^5 \\ &= \sum_{k=1}^n (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k^5) \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\ &= 5S_n + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 5S_n + 10 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \quad \text{d'après les formules des sommes} \\ &= 5S_n + 5 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{2} + 10 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= 5S_n + \frac{n(n+1)(15n(n+1) + 10(2n+1) + 15)}{6} + n \\ &= 5S_n + \frac{n(n+1)(15n^2 + 35n + 25)}{6} + n. \end{aligned}$$

On obtient bien l'égalité voulue.

3. D'après les deux premières questions : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$5S_n + \frac{n(n+1)(15n^2 + 35n + 25)}{6} + n = (n+1)^5 - 1.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$5S_n + \frac{n(n+1)(15n^2 + 35n + 25)}{6} = (n+1)^5 - n - 1 = (n+1)^5 - (n+1).$$

On a donc en factorisant à droite par $(n+1)$ puis en développant la puissance 4 à l'aide du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} 5S_n + \frac{n(n+1)(15n^2+35n+25)}{6} &= (n+1)((n+1)^4 - 1) \\ &= (n+1)(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n) \\ &= n(n+1)(n^3 + 4n^2 + 6n + 4). \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n^3 + 4n^2 + 6n + 4)}{5} - \frac{n(n+1)(15n^2 + 35n + 25)}{30} = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}}$.

Exercice 2

1. Pour tout réels a et b , on a : $(a-b)^2 \geq 0$ soit en développant :

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

2. Soient a , b et c trois réels, on montre de la même manière que :

$$a^2 + c^2 \geq 2ac \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 \geq 2bc \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

En additionnant ces trois inégalités, on obtient :

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 2 pour obtenir le résultat voulu :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

3. On remarque pour tout réels positifs, a , b et c , on a :

$$(a-1)^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad (b-1)^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad (c-1)^2 \geq 0$$

soit en développant et regroupant des terme :

$$a^2 + 1 \geq 2a \quad \text{et} \quad b^2 + 1 \geq 2b \quad \text{et} \quad c^2 + 1 \geq 2c$$

Remarquons alors que :

$$8abc = 2a \times 2b \times 2c$$

Comme les réels sont positifs, on peut majorer chacun des termes avec les inégalités ci-dessus et on obtient :

$$8abc \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1).$$

Exercice 3

1. D'une part

$$\sum_{k=1}^1 u_k = u_1 = \frac{\sqrt{0!}}{(1+\sqrt{1})} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part

$$1 - \frac{\sqrt{1!}}{\prod_{i=1}^1 (1+\sqrt{i})} = 1 - \frac{\sqrt{1!}}{1+\sqrt{1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'égalité $(\star\star)$ est vraie pour $n = 1$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, posons la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{i})}$ ».

Initialisation D'après la question 1., la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} u_k &= \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{i})} + u_{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{i})} + \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{n!}(1 + \sqrt{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})} + \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})} \quad \text{en mettant les fractions au même dénominateur} \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{n!} - \sqrt{n!}(1 + \sqrt{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{n!} \cdot \sqrt{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{n!(n+1)}}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})} \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \sqrt{i})}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. (a) Soit un entier $k \geq 2$. Par définition de u_k , on a :

$$(1 + \sqrt{k})u_k = (1 + \sqrt{k}) \cdot \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^k (1 + \sqrt{i})} = \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 + \sqrt{i})} = \frac{\sqrt{k-1} \sqrt{(k-2)!}}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 + \sqrt{i})} = \sqrt{k-1} \cdot u_{k-1}.$$

Remarque : comme $k \geq 2$ alors $k-1 \geq 1$ et donc u_{k-1} est bien défini.

- (b) Soit un entier $n \geq 2$. Sommons la relation (Δ) pour k allant de 2 à n . On obtient alors

$$\sum_{k=2}^n (1 + \sqrt{k})u_k = \sum_{k=2}^n \sqrt{k-1} \cdot u_{k-1}$$

i.e., en développant à gauche et en faisant le changement d'indice $[j = k-1]$ à droite

$$\sum_{k=2}^n u_k + \sum_{k=2}^n \sqrt{k} \cdot u_k = \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{j} \cdot u_j.$$

On obtient donc

$$\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{j} \cdot u_j - \sum_{k=2}^n \sqrt{k} \cdot u_k = \sqrt{1} \cdot u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n = u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k = 2u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{(n-1)!}}{\prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{i})} = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{i})}.$$

- (c) On montrera que, pour tout entier $n \geq 2$, la relation $(\star\star)$ était vraie. Comme elle est vraie aussi pour $n = 1$ d'après la première question, alors elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

1. (a) La relation $(\star)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, appliquons donc là pour $n = 1$, on obtient $\boxed{f(2) = 2}$.
Par ailleurs, la fonction f est supposée strictement croissante. Donc $f(0) < f(1) < f(2)$. Or, $f(0)$ et $f(1)$ sont dans $\mathbb{N}$ et il n'y a que deux valeurs strictement inférieures à 2. On en déduit que $\boxed{f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1}$.
- (b) De même en appliquant la relation $(\star)$ à $n = 2$, on a $\boxed{f(4) = 4}$. Or, la fonction f étant strictement croissante, on a $f(2) < f(3) < f(4)$ d'où $2 < f(3) < 4$. $f(3)$ est un entier et il y a un unique entier compris strictement entre 2 et 4, d'où $\boxed{f(3) = 3}$.
- (c) On montre de même que $\boxed{f(8) = 8}$ puis que $\boxed{f(5) = 5, f(6) = 6 \text{ et } f(7) = 7}$.
- (d) On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{f(n) = n}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $f(n+k) \geq f(n) + k$ » est vraie.

Initialisation ($k = 0$) $f(n+0) = f(n) \geq f(n) + 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

La fonction f étant strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, $f(n+k+1) \geq f(n+k) + 1$. Or par hypothèse de récurrence, $f(n+k) \geq f(n) + k$. D'où $f(n+k+1) \geq f(n) + k + 1$ et ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang donc vraie à tout rang. On a donc

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad f(n+k) \geq f(n) + k$$

- (b) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. D'après la question précédente appliquée à $n-k$ et k deux entiers positifs, on a $f(n-k+k) \geq f(n-k) + k$ d'où $\boxed{f(n) - k \geq f(n-k)}$.
3. Soit $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^p \leq k \leq 2^{p+1}$. Si $p = 0$, alors, le résultat est déjà démontré à la question 1.a. Supposons $p \geq 1$. On a $k = 2^p + k - 2^p$ avec $2^p \in \mathbb{N}$ et $k - 2^p \in \mathbb{N}$. D'après la question 2.(a), on a alors

$$f(k) \geq f(2^p) + k - 2^p$$

d'où $f(k) \geq k$ car $f(2^p) = 2^p$ d'après la relation $(\star)$.

On a également $k = 2^{p+1} - (2^{p+1} - k)$ avec 2^{p+1} et $2^{p+1} - k$ deux entiers. D'après la question 2.(b), il vient

$$f(2^{p+1}) - (2^{p+1} - k) \geq f(k).$$

Or, d'après la relation $(\star)$, $f(2^{p+1}) = 2^{p+1}$. D'où, $f(k) \leq k$.

On en déduit que $\boxed{f(k) = k}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a par croissance de la fonction $\ln$

$$2^p \leq k \iff p \ln(2) \leq \ln(k).$$

Cela équivaut ainsi à $p \leq \frac{\ln(k)}{\ln(2)}$.

Posons alors $p = \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$. Ainsi,

$$p \leq \frac{\ln k}{\ln 2} < p+1 \quad \text{d'où} \quad p \ln(2) \leq \ln k \leq (p+1) \ln(2) \quad \text{puis} \quad 2^p \leq k \leq 2^{p+1}.$$

En appliquant la question 3, il vient $f(k) = k$. On conclut

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) = k}.$$

On a donc montré que si f était solution du problème alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = k$. Réciproquement, la fonction $f(k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation $(\star)$.