Corrigé du DM n° 1

Exercice 1

1. Avec le changement d'indice $[j=k+1]$ dans la première somme, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5-\sum_{k=1}^{n}k^5=\sum_{j=2}^{n+1}j^5-\sum_{k=1}^{n}k^5=\sum_{j=2}^{n}j^5+(n+1)^5-\sum_{k=2}^{n}k^5-1=(n+1)^5-1.$$

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5-\sum_{k=1}^{n}k^5=(n+1)^5-1}$.

2. On rappelle à toutes fins utiles que $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$(k+1)^5=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5-\sum_{k=1}^{n}k^5&=\sum_{k=1}^{n}\left(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1\right)-\sum_{k=1}^{n}k^5\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k^5\right)\quad\text{par linéarité de la somme}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1\right)\\
&=5S_n+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\quad\text{par linéarité de la somme}\\
&=5S_n+10\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}+10\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\ \text{d'après les formules des sommes}\\
&=5S_n+5\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{2}+10\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\\
&=5S_n+\frac{n(n+1)(15n(n+1)+10(2n+1)+15)}{6}+n\\
&=5S_n+\frac{n(n+1)\left(15n^2+35n+25\right)}{6}+n.
\end{aligned}$$

On obtient bien l'égalité voulue.

3. D'après les deux premières questions : $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$5S_n+\frac{n(n+1)\left(15n^2+35n+25\right)}{6}+n=(n+1)^5-1.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$5S_n+\frac{n(n+1)\left(15n^2+35n+25\right)}{6}=(n+1)^5-n-1=(n+1)^5-(n+1).$$

On a donc en factorisant à droite par $(n+1)$ puis en développant la puissance 4 à l'aide du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}5S_n + \frac{n(n+1)\left(15n^2+35n+25\right)}{6} &= (n+1)\left((n+1)^4-1\right)\\ &= (n+1)\left(n^4+4n^3+6n^2+4n\right)\\ &= n(n+1)\left(n^3+4n^2+6n+4\right).\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)\left(n^3+4n^2+6n+4\right)}{5} - \frac{n(n+1)\left(15n^2+35n+25\right)}{30} = \frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}.$$

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}}$.

Exercice 2

1. Pour tout réels a et b, on a : $(a-b)^2 \geqslant 0$ soit en développant :

$$a^2+b^2-2ab \geqslant 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

2. Soient a, b et c trois réels, on montre de la même manière que :

$$a^2+c^2 \geqslant 2ac \quad \text{et} \quad b^2+c^2 \geqslant 2bc \quad \text{et} \quad a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

En additionnant ces trois inégalités, on obtient :

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 2 pour obtenir le résultat voulu :

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac.$$

3. On remarque pour tout réels positifs, a, b et c, on a :

$$(a-1)^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (b-1)^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (c-1)^2 \geqslant 0$$

soit en développant et regroupant des terme :

$$a^2+1 \geqslant 2a \quad \text{et} \quad b^2+1 \geqslant 2b \quad \text{et} \quad c^2+1 \geqslant 2c$$

Remarquons alors que :

$$8abc = 2a \times 2b \times 2c$$

Comme les réels sont positifs, on peut majorer chacun des termes avec les inégalités ci-dessus et on obtient :

$$8abc \leqslant (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Exercice 3

1. D'une part

$$\sum_{k=1}^{1} u_k = u_1 = \frac{\sqrt{0!}}{(1+\sqrt{1})} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part

$$1 - \frac{\sqrt{1!}}{\prod_{i=1}^{1}(1+\sqrt{i})} = 1 - \frac{\sqrt{1!}}{1+\sqrt{1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'égalité $(\star\star)$ est vraie pour $n=1$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})}$ ».

Initialisation D'après la question 1., la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} u_k &= \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})} + u_{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})} + \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}(1+\sqrt{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} + \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \text{ en mettant les fractions au même dénominateur} \\
&= 1 + \frac{\sqrt{n!} - \sqrt{n!}(1+\sqrt{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}\cdot\sqrt{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!(n+1)}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. (a) Soit un entier $k \geqslant 2$. Par définition de u_k, on a :

$$(1+\sqrt{k})u_k = (1+\sqrt{k})\cdot\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\sqrt{i})} = \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k-1}(1+\sqrt{i})} = \frac{\sqrt{k-1}\sqrt{(k-2)!}}{\prod_{i=1}^{k-1}(1+\sqrt{i})} = \sqrt{k-1}\cdot u_{k-1}.$$

Remarque : comme $k \geqslant 2$ alors $k-1 \geqslant 1$ et donc u_{k-1} est bien défini.

(b) Soit un entier $n \geqslant 2$. Sommons la relation (Δ) pour k allant de 2 à n. On obtient alors

$$\sum_{k=2}^{n}(1+\sqrt{k})u_k = \sum_{k=2}^{n}\sqrt{k-1}\cdot u_{k-1}$$

i.e., en développant à gauche et en faisant le changement d'indice $[j = k-1]$ à droite

$$\sum_{k=2}^{n} u_k + \sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}\cdot u_k = \sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{j}\cdot u_j.$$

On obtient donc
$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{j} \cdot u_j - \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} \cdot u_k = \sqrt{1} \cdot u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n = u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n.$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k = 2u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{(n-1)!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})} = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})}.$$

(c) On montré que, pour tout entier $n \geqslant 2$, la relation $(\star\star)$ était vraie. Comme elle est vraie aussi pour $n = 1$ d'après la première question, alors elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

1. (a) La relation $(\star)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, appliquons donc là pour $n = 1$, on obtient $\boxed{f(2) = 2}$.
Par ailleurs, la fonction f est supposée strictement croissante. Donc $f(0) < f(1) < f(2)$. Or, $f(0)$ et $f(1)$ sont dans $\mathbb{N}$ et il n'y a que deux valeurs strictement inférieures à 2 . On en déduit que $\boxed{f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1}$.

   (b) De même en appliquant la relation $(\star)$ à $n = 2$, on a $\boxed{f(4) = 4}$. Or, la fonction f étant strictement croissante, on a $f(2) < f(3) < f(4)$ d'où $2 < f(3) < 4$. $f(3)$ est un entier et il y a un unique entier compris strictement entre 2 et 4 , d'où $\boxed{f(3) = 3}$.

   (c) On montre de même que $\boxed{f(8) = 8}$ puis que $\boxed{f(5) = 5, f(6) = 6 \text{ et } f(7) = 7}$.

   (d) On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{f(n) = n}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $f(n+k) \geqslant f(n) + k$ » est vraie.
Initialisation $(k = 0)$ $\quad f(n+0) = f(n) \geqslant f(n) + 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
La fonction f étant strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, $f(n+k+1) \geqslant f(n+k) + 1$. Or par hypothèse de récurrence, $f(n+k) \geqslant f(n) + k$. D'où $f(n+k+1) \geqslant f(n) + k + 1$ et ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang donc vraie à tout rang. On a donc
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad f(n+k) \geqslant f(n) + k$$

   (b) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leqslant n$. D'après la question précédente appliquée à $n-k$ et k deux entiers positifs, on a $f(n-k+k) \geqslant f(n-k) + k$ d'où $\boxed{f(n) - k \geqslant f(n-k)}$.

3. Soit $(p,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^p \leqslant k \leqslant 2^{p+1}$. Si $p = 0$, alors, le résultat est déjà démontré à la question 1.a.
Supposons $p \geqslant 1$. On a $k = 2^p + k - 2^p$ avec $2^p \in \mathbb{N}$ et $k - 2^p \in \mathbb{N}$. D'après la question 2.(a), on a alors
$$f(k) \geqslant f\left(2^p\right) + k - 2^p$$
d'où $f(k) \geqslant k$ car $f\left(2^p\right) = 2^p$ d'après la relation $(\star)$.
On a également $k = 2^{p+1} - \left(2^{p+1} - k\right)$ avec 2^{p+1} et $2^{p+1} - k$ deux entiers. D'après la question 2.(b), il vient
$$f\left(2^{p+1}\right) - \left(2^{p+1} - k\right) \geqslant f(k).$$
Or, d'après la relation $(\star)$, $f\left(2^{p+1}\right) = 2^{p+1}$. D'où, $f(k) \leqslant k$.
On en déduit que $\boxed{f(k) = k}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a par croissance de la fonction $\ln$
$$2^p \leqslant k \Longleftrightarrow p\ln(2) \leqslant \ln(k).$$
Cela équivaut ainsi à $p \leqslant \dfrac{\ln(k)}{\ln(2)}$.
Posons alors $p = \left\lfloor \dfrac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$. Ainsi,
$$p \leqslant \frac{\ln k}{\ln 2} < p + 1 \quad \text{d'où} \quad p\ln(2) \leqslant \ln k \leqslant (p+1)\ln(2) \quad \text{puis} \quad 2^p \leqslant k \leqslant 2^{p+1}.$$
En appliquant la question 3 , il vient $f(k) = k$. On conclut

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) = k}.$$

On a donc montré que si f était solution du problème alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = k$. Réciproquement, la fonction $f(k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation $(\star)$.

