

Devoir maison n° 1

Exercice 1 *Etude d'une suite définie par une somme*

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

On se propose d'exprimer u_n en fonction de n , par deux méthodes différentes :

1. **Première méthode : conjecture et récurrence**

- (a) Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- (b) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
- (c) Démontrer ce résultat par récurrence.

2. **Deuxième méthode : par un calcul direct**

- (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

- (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Remarque : On n'oubliera pas de vérifier que les expressions obtenues par la méthode 1 et par la méthode 2 sont égales.

Exercice 2 *Etude d'un produit*

Dans cet exercice, on souhaite calculer, pour $n \geq 2$, la valeur du produit $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ de deux manières différentes.

1. **Première méthode**

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}.$$

- (b) Calculer alors P_n pour $n \geq 2$.

2. **Deuxième méthode**

Montrer par récurrence que pour $n \geq 2$,

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

3. La formule reste-elle vraie pour $n = 1$? pour $n = 0$?

Exercice 3

On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$

On se propose pour cela de raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $x > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On commence par montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Pour cela, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. En déduire qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$, $u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$.
4. On souhaite montrer que $\mu = 0$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\lambda 2^n + \mu(-3)^n > 0$.
 - (b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $\lambda + \mu \left(-\frac{3}{2}\right)^n > 0$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $\lambda - \mu \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} > 0$.
 - (d) On suppose que $\mu > 0$. En utilisant l'inégalité établie en 4.(c), aboutir à une contradiction.
 - (e) Adapter le raisonnement des questions 4.(c) et (d) pour montrer qu'on ne peut pas avoir $\mu < 0$.
 - (f) Conclure que $\mu = 0$.
5. Trouver la valeur de λ en utilisant la valeur de u_0 .
6. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on déduire sur l'expression de f ?

Synthèse : Conclure