Devoir maison n° 1

Ce devoir maison est composé de trois exercices obligatoires et d'un exercice facultatif.

Rendre une copie pour deux mais chaque membre du binôme doit avoir traité les trois exercices. On prendra soin de relire la partie rédigée par l'autre membre du binôme.

Exercice 1

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$.

1. Donner une expression simple de
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5 - \sum_{k=1}^{n} k^5$$
2. Montrer par ailleurs que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5 - \sum_{k=1}^{n} k^5 = 5S_n + \frac{n(n+1)\left(15n^2+35n+25\right)}{6} + n.$$
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$$

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leqslant a^2+b^2$.
2. En déduire que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$.
3. En déduire aussi que, pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3$, on a $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant 8abc$.

Exercice 3

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$u_k = \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\sqrt{i})}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante par deux méthodes :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})} \quad (\star\star)$$

1. Démontrer l'égalité $(\star\star)$ pour $n=1$.
2. **Première méthode** - Montrer l'égalité $(\star\star)$ par récurrence.

3. **Deuxième méthode -**
   (a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$,
   $$(1+\sqrt{k})u_k = \sqrt{k-1} \cdot u_{k-1} \qquad (\Delta)$$
   (b) Soit un entier $n \geqslant 2$. Sommer la relation (Δ) pour k allant de 2 à n, faire apparaitre un télescopage et retrouver la relation $(\star\star)$.
   (c) Conclure soigneusement.

Exercice 4 *Facultatif, pour ceux qui veulent aller plus loin*

On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(2^n\right) = 2^n \qquad (\star)$$

Pour cela, on va raisonner par analyse-synthèse. On suppose donc qu'il existe des solutions et on note f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant la propriété $\star$.

1. *Calcul de quelques valeurs*
   (a) Calculer $f(2)$ puis $f(0)$ et $f(1)$ en justifiant soigneusement.
   (b) Calculer $f(4)$ puis $f(3)$.
   (c) Calculer $f(8)$ puis $f(5), f(6)$ et $f(7)$.
   (d) Que peut-on conjecturer ?
2. (a) Montrer que : $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad f(n+k) \geqslant f(n) + k$.
   (b) En déduire que : $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant k \leqslant n, \quad f(n-k) \leqslant f(n) - k$.
3. Montrer que : $\forall (p,k) \in \mathbb{N}^2$, tels que $2^p \leqslant k \leqslant 2^{p+1}, f(k) = k$.
4. Conclure.

