

Corrigé du DM n° 12

Problème 1 *EML 2023 math approfondies*

Préliminaire

1. D'après le résultat rappelé en préambule, on a $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \underbrace{\dim \mathbb{R}}_{=1} = \dim E$. On a donc bien

$$\boxed{\dim(E) = \dim(E^*)}.$$

2. (a) L'image $\text{Im } \varphi$ de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc est de $\boxed{\text{dimension 0 ou 1}}$.
 (b) Si $\dim \text{Im } \varphi = 0$ alors $\text{Im } \varphi = \{0\}$ et donc φ est l'application nulle. Sinon, $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}$ et $\dim \text{Im } \varphi = 1 = \dim \mathbb{R}$, donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}$, ce qui signifie exactement que φ est surjective.
 En conclusion, l'application φ est $\boxed{\text{soit nulle, soit surjective}}$.
 (c) Le théorème du rang affirme que $\dim E = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$. Comme φ n'est pas l'application nulle, on a $\dim \text{Im } \varphi = 1$ de sorte que $\boxed{\dim \text{Ker } \varphi = n - 1}$.

Partie I - Des exemples

3. Premier exemple

- (a) Pour tout $P \in E$ on a $g(P) \in \mathbb{R}$. Montrons que l'application g est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in E^2$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$g(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t)) dt = \lambda \int_0^1 P(t) dt + \int_0^1 Q(t) dt.$$

Ainsi l'application $\boxed{g \in E^*}$.

- (b) Comme $g(1) = 1$, g n'est pas l'application nulle. Son noyau est un hyperplan de E , qui est de dimension $p + 1$, donc $\boxed{\dim(\text{Ker})(g) = p}$.
 (c) Soit $k \in \{1, \dots, p\}$. On a :

$$g(Q_k) = \int_0^1 Q_k(t) dt = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x}{k+1} \right]_0^1 = 0.$$

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $Q_k \in \text{Ker } g$.
 Montrons que la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k Q_k = 0$ soit $\sum_{k=1}^p \lambda_k \left(x^k - \frac{1}{k+1} \right) = 0$ soit $\sum_{k=1}^p \lambda_k x^k - \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{k+1} = 0$.

Par identification des termes de même degré, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k = 0$. La famille est donc libre. Elle est de cardinal $p = \dim(E)$, c'est donc une $\boxed{\text{base de Ker } g}$.

4. Second exemple

- (a) Pour tout $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(P) = P(0) \in \mathbb{R}$ et

$$f(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = f(P) + \lambda f(Q).$$

Ainsi f est un $\boxed{\text{élément de } E^*}$.

- (b) Soit $P \in \text{Ker}(f)$ alors $f(P) = 0$ soit $P(0) = 0$. Ainsi $\text{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes de E de terme constant nul, c'est à dire $\boxed{\text{Vect}(x, x^2, \dots, x^p)}$.
 5. (a) D'après la question 2.(c), on a $\dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f = n - 1$. Comme $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$, il vient $\boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } g}$.
 (b) Comme $\text{Ker } f \neq E$, il existe bien un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f .

- (c) • Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Vect}(x_0)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda x_0$ et ainsi, puisque $x \in \text{Ker } f$:

$$0 = f(x) = \lambda \underbrace{f(x_0)}_{\neq 0}$$

ce qui amène $\lambda = 0$ donc $x = 0$. On a donc $\text{Ker } f \cap \text{Vect}(x_0) = \{0_E\}$.

- De plus $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Vect}(x_0) = n - 1 + 1 = \dim E$, ce qui permet de conclure que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0)$.

- (d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrons que h est nulle.

Soit $x \in E$. On écrit $x = y + \lambda x_0$ selon la somme directe $E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0)$. On a alors :

$$h(x) = g(x_0) \underbrace{(f(y) + \lambda f(x_0))}_{=0} - f(x_0) \underbrace{(g(y) + \lambda g(x_0))}_{=0} = 0$$

Ceci étant vrai quelque soit le choix de x dans E on a $h = 0$.

- (e) D'après la question précédente, comme $f(x_0) \neq 0$, il vient $g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f$: les formes linéaires f et g sont proportionnelles.

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. (a) Comme la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre, on peut la compléter en une base de E : il existe un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E .

- (b) Tout d'abord, une application linéaire étant entièrement déterminée par les images des éléments d'une base, l'application φ est correctement définie.

L'application φ est une forme linéaire non nulle, donc son noyau est de dimension $n - 1$, et il contient de plus H , ce qui prouve que $H = \text{Ker } \varphi$.

7. Soit $x \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, p\}) (f_i(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, p\}) (x \in \text{Ker } f_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \end{aligned}$$

On a donc bien : $\text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$.

8. (a) Comme f est surjective, le vecteur ε_1 admet un antécédent x par f .

- (b) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$(*) \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i = 0 \quad (\text{égalité de fonctions}).$$

Soit x un antécédent de ε_1 par f . On a alors $f(x) = (\underbrace{1}_{f_1(x)}, \underbrace{0}_{f_2(x)}, \dots, \underbrace{0}_{f_p(x)}) \in \mathbb{R}^p$ et en évaluant $(*)$ en x il vient

$\alpha_1 = 0$. En prenant successivement des antécédents de $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ par f on obtient de la même manière :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^* .

9. (a) Comme f n'est pas surjective, $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ qui est différent de $\mathbb{R}^p$ donc $m < p$.

- (b) • Si $m = 0$, tout hyperplan de $\mathbb{R}^p$ contient $\text{Im } f = \{0\}$.

- On suppose que $m \geq 1$. On complète une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\text{Im } f$ en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$ et on pose :

$$H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$$

Ainsi H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ qui contient $\text{Im } f$.

- (c) D'après la question 6, on peut écrire $H = \text{Ker } \psi$ où ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Mais, en regardant la matrice de ψ dans le couple des bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}$ (qui est une matrice ligne), il existe $a_1, \dots, a_p$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $v = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ on ait :

$$\psi(v) = \sum_{i=1}^p a_i x_i$$

Pour tout $x \in E$, comme $f(x) \in H = \text{Ker } \psi$, on a : $0 = \psi(f(x)) = \sum_{i=1}^p a_i f_i(x)$.

Ceci étant valable pour tout $x \in E$ on a l'égalité de fonctions $\sum_{i=1}^p a_i f_i = 0$ où les scalaires $a_1, \dots, a_p$ ne sont pas tous nuls, puisque ψ est non nulle.

Conclusion : La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* .

10. (a) Si f n'est pas surjective, d'après la question 9.(c), la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* , ce qui est absurde : l'application linéaire f est surjective.
- (b) Comme f est surjective, en écrivant le théorème du rang, on obtient :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f + p$$

Ainsi, avec la question 7, il vient : $\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \right) = \dim \text{Ker } f = \dim E - p = n - p$.