Devoir maison n° 12

Problème 1 *EML 2023 math approfondies*

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n.

Notations et définition

- On note 0_E le vecteur nul de E.
- Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
- Une ***forme linéaire*** sur E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$.
- On note, dans ce problème, $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
- Un ***hyperplan*** de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de l'espace vectoriel E.

Lorsque F est un espace vectoriel de dimension finie, on admettra que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

On admettra aussi qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Enfin, on rappelle le **théorème de la base incomplète** : *toute famille libre de E peut se compléter en une base de E.*

Préliminaire

1. Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.

2. Soit φ un élément de E^*.
   (a) Quelles sont les dimensions possibles pour l'image $\mathrm{Im}\varphi$ de φ ?
   (b) En déduire que φ est soit nulle, soit surjective.
   (c) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\mathrm{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie par : $g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Démontrer que g est un élément de E^*.
   (b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
   (c) Pour $k \in \{1,\ldots,p\}$ on considère la fonction polynôme $Q_k : x \mapsto x^k - \dfrac{1}{k+1}$.
   Démontrer que la famille $(Q_1,\ldots,Q_p)$ est une base du noyau de g.

4. **Second exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.
   (a) Démontrer que f est un élément de E^*.
   (b) Déterminer le noyau de f.

5. Dans cette question, on revient au cadre général.
   Soient f et g deux éléments de E^*, non nuls, tels que $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}g$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$.

(b) Justifier de l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.

(c) Démontrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$, où $\mathrm{Vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0.

(d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.

(e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. On a vu à la question 2c que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Le but de cette question est de démontrer que ***tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle***.
   Soit H un hyperplan de E.
   (a) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. Justifier de l'existence d'un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E.
   (b) Soit φ l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ défini par :
   $$\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}.$$
   Justifier que cette définition est correcte et démontrer que $\mathrm{Ker}\varphi = H$.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geq 2$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de formes linéaires sur E, ainsi que l'application :
$$f = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right).$$
On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

7. Démontrer que : $\mathrm{Ker} f = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} f_i$.

8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.
   (a) On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f.
   (b) Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^*.

9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.
   (a) Que peut-on dire de la dimension m de $\mathrm{Im} f$?
   (b) En complétant une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\mathrm{Im} f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\mathrm{Im} f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
   (c) En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).

10. On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^*.
    (a) Justifier que f est surjective.
    (b) Démontrer que : $\dim \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} f_i \right) = n - p$.