

Corrigé du DM n° 11

Exercice 1

1. Un exemple -

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

L'application f est donc bien linéaire.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\ &= f(x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z) \\ &= (x + y - 2z + x + y - 2z - 2(x + y - 2z), *, *) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Cela signifie que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul de \mathbb{R}^3 .

(c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \iff x + y - 2z = 0 \iff x = -y + 2z$. Ainsi on trouve

$$\text{Ker}(f) = \{(-y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

La famille $(-1, 1, 0), (2, 0, 1)$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$ par définition et libre car composée de deux vecteurs non-colinéaires. Ainsi c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

Comme la famille $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 , on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 1), (-2, -2, -2)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 1)). \end{aligned}$$

La famille $((1, 1, 1))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ par définition et libre car composée d'un seul vecteur, qui est non-nul. Donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

(d) On a $(1, 1, 1) = (-1, 1, 0) + (2, 0, 1)$. Ainsi $(1, 1, 1) \in \text{Ker}(f)$ et donc $\text{Vect}(1, 1, 1) \subset \text{Ker}(f)$ car le noyau est un espace vectoriel. On a bien : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Remarque : On aurait aussi pu calculer $f(1, 1, 1)$ et vérifier que cela faisait bien $0_{\mathbb{R}^3}$ pour montrer que $(1, 1, 1) \in \text{Ker}(f)$.

(e) D'après la question 1.(c), on voit que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$. De plus la famille $((3, 2, 1))$ est génératrice de $\text{Vect}((3, 2, 1))$ et libre car composée d'un unique vecteur, qui est non-nul. Donc cette famille est une base de $\text{Vect}((3, 2, 1))$. Ainsi $\dim(\text{Vect}((3, 2, 1))) = 1$. On obtient donc

$$\dim(\text{Vect}((3, 2, 1))) + \dim(\text{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Soit $u \in \text{Vect}((3, 2, 1)) \cap \text{Ker}(f)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(3, 2, 1) = (3\lambda, 2\lambda, \lambda)$. De plus, $u \in \text{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ soit $f(3\lambda, 2\lambda, \lambda) = (0, 0, 0)$ i.e. $(3\lambda + 2\lambda - 2\lambda, 3\lambda + 2\lambda - 2\lambda, 3\lambda + 2\lambda - 2\lambda) = (0, 0, 0)$. On en déduit que $3\lambda = 0$ puis que $u = (0, 0, 0)$. Ainsi on a montré que

$$\text{Vect}((3, 2, 1)) \cap \text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$$

Ainsi on a bien $\text{Vect}((3, 2, 1)) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$

2. Un premier résultat -

(a) Soit $x \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi

$$f(x) = f(f(a)) = f \circ f(a) = \theta(a) = 0_E.$$

Donc $x \in \text{Ker}(f)$. On a ainsi montré que $\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)}$.

(b) Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, on a $\text{Im}(f) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim(\text{Im}(f)) \geq 1$. De plus d'après ce qui précède et le théorème du rang

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f)) \quad \text{i.e.} \quad 2 \dim(\text{Im}(f)) \leq 3.$$

On en déduit que

$$1 \leq \dim(\text{Im}(f)) \leq \frac{3}{2}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = 1}$.

(c) Comme $x \in \text{Im}(f)$ on en déduit que $\text{Vect}(x) \subset \text{Im}(f)$ (car $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel). De plus, comme x est un vecteur non-nul, on a $\dim(\text{Vect}(x)) = 1 = \dim(\text{Im}(f))$. Ainsi $\boxed{\text{Vect}(x) = \text{Im}(f)}$.

(d) Comme $f(a) \neq 0_E$ alors $a \neq 0_E$ et donc $\dim(\text{Vect}(a)) = 1$. De plus d'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1.$$

Ainsi on en déduit que

$$\dim(\text{Vect}(a)) + \dim(\text{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(E)$$

Soit $y \in \text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(f)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda a$. De plus, $y \in \text{Ker}(f)$ donc $f(y) = 0_E$. Or $f(y) = f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda x$. On en déduit que $\lambda x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$ alors $\lambda = 0$ et donc $y = 0_E$. On a ainsi montré que

$$\text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

On a donc bien $\boxed{\text{Vect}(a) \oplus \text{Ker}(f) = E}$.

3. Un deuxième résultat -

(a) Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente on a $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) \geq 1$. Ainsi d'après ce qui précède et le théorème du rang

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - \dim(\text{Im}(f))$$

On en déduit que

$$1 \leq \dim(\text{Im}(f)) \leq 2 \quad \text{i.e.} \quad \dim(\text{Im}(f)) \in \{1, 2\}.$$

(b) On a toujours $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\text{Im}(f)).$$

Ainsi on a montré que $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)}$.

(c) Montrons que la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E.$$

En appliquant f on obtient

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 f(f(a_1)) + \mu_2 f(f(a_2)) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

On obtient donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$. Comme la famille (x_1, x_2) est une base de $\text{Im}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En injectant cela dans $(*)$, on obtient $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E$, ce qui nous donne pour les mêmes raisons que précédemment $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Ainsi la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. De plus elle a $4 = \dim(E)$ éléments. C'est donc une $\boxed{\text{base de } E}$.

(d) Comme la famille (a_1, a_2) est une sous-famille de (a_1, a_2, x_1, x_2) , elle est libre. C'est donc une base de $\text{Vect}(a_1, a_2)$. De plus (x_1, x_2) est une base de $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$. Donc (x_1, x_2) est une base de $\text{Ker}(f)$. En concaténant ces deux bases, on a obtenu une base de E (d'après la question précédente) donc on a bien $\boxed{\text{Vect}(a_1, a_2) \oplus \text{Ker}(f) = E}$.

Exercice 2 Les polynômes de Lagrange

1. On a :

$$P_1 = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \times \frac{x - a_3}{a_1 - a_3} = \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}.$$

$$P_2 = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \times \frac{x - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}.$$

$$P_3 = \frac{x - a_1}{a_3 - a_1} \times \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} = \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

2. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en utilisant les propriétés du degré, on obtient :

$$\deg(P_i) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \deg\left(\frac{x - a_k}{a_i - a_k}\right) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} 1 = n - 1.$$

On en déduit que chaque polynôme P_i possède au plus $n - 1$ racines. On détermine les racines des P_i grâce à leur expression qui nous est donnée sous forme factorisée.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les racines de P_i sont les réels a_j avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$. En effet, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, $P_i(a_j) = 0$. Ainsi P_i a pour racines $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$. Ces $n - 1$ réels sont bien toutes les racines de P_i car il en a, au plus, $n - 1$.

(b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ alors $P_i(a_j) = 0$.

Pour $j = i$, on a :

$$P_i(a_i) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} 1 = 1.$$

3. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$Q(a_k) = \sum_{i=1}^n P(a_i)P_i(a_k) = P(a_k)P_k(a_k) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} P(a_i)P_i(a_k) = P(a_k) \times 1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} P(a_i) \times 0 = P(a_k).$$

(b) Posons le polynôme $R = P - Q$, le polynôme R est au plus de degré $n - 1$. De plus, d'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $R(a_k) = P(a_k) - Q(a_k) = 0$. Ainsi le polynôme R possède n racines, comme il est de degré inférieur ou égal à $n - 1$, c'est le polynôme nul donc $\boxed{P = Q}$.

4. La famille (P_1, P_2, \dots, P_n) est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. En effet, on a montré à la question 3. que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ s'écrivait :

$$P = \sum_{i=1}^n P(a_i)P_i.$$

Ainsi $P \in \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$.

De plus, $\text{Card}((P_1, \dots, P_n)) = n$ et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[x]) = n$ donc cette famille est en fait une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_{n-1}[x]}$.

Les coordonnées de P dans cette base sont $\boxed{(P(a_1), \dots, P(a_n))}$.

Problème 1

1. (a) On commence par remarquer que f est bien une application qui va de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 . Montrons qu'elle est linéaire. Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda X_1 + X_2) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2 - (\lambda t_1 + t_2), 2(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) + \lambda t_1 + t_2, \\ &\quad \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 - (\lambda t_1 + t_2)) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, z_1 - t_1, 2x_1 + 2y_1 - z_1 + t_1, x_1 + y_1 + z_1 - t_1) \\ &\quad + (x_2 + y_2, z_2 - t_2, 2x_2 + 2y_2 - z_2 + t_2, x_2 + y_2 + z_2 - t_2) \\ &= \lambda f(X_1) + f(X_2). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire et il s'agit bien d'un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathbb{R}^4}$.

(b) Soit $X = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f)$, on a $f(X) = 0$ soit le système :

$$\begin{cases} x + y & & & = 0 \\ & & z - t & = 0 \\ 2x + 2y - z + t & & & = 0 \\ x + y + z - t & & & = 0 \end{cases}$$

On échelonne ce système à l'aide du pivot de Gauss : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x + y & & & = 0 \\ & & z - t & = 0 \\ & & -z + t & = 0 \\ & & z - t & = 0 \end{cases}$$

Le système se réduit donc à deux équations $x + y = 0$ et $z - t = 0$ soit $x = -y$ et $z = t$. On a donc :

$$\text{Ker}(f) = \{(-y, y, z, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)).$$

La famille $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ est donc une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$. Comme elle est constituée de deux vecteurs colinéaires, elle est libre et elle constitue donc une base de $\text{Ker}(f)$.

Nous avons déterminé une base de $\text{Ker}(f)$ qui est de cardinal 2 donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$, ainsi d'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Soit (e_1, \dots, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 , on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_4)),$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (0, 1, -1, 1))$$

La famille $((1, 0, 2, 1), (0, 1, -1, 1))$ est donc une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Comme elle est de cardinal 2, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

(c) D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Il reste donc à montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ pour avoir que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.

Soit $X \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$X = a(-1, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) \quad \text{et} \quad X = c(1, 0, 2, 1) + d(0, 1, -1, 1)$$

soit

$$(-a, a, b, b) = (c, d, 2c - d, c + d)$$

Par identification, on obtient :

$$a = -c, a = d, b = 2c - d = 3c, b = c + d = 0$$

On obtient alors $a = b = c = d = 0$ et donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

2. (a) Commençons par montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f^3) = \{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f^3)$ alors en particulier $x \in \text{Im}(f^3)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f^3(z)$. Or $x \in \text{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$ soit $f^4(z) = 0$. Comme on sait que $f + f^4 = 0$, on en déduit que $f(z) = -f^4(z) = 0$. Cela implique, en appliquant deux fois f et parce que $f(0) = 0$, que $f^3(z) = 0$ soit $x = 0$. Ainsi on a $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f^3) = \{0\}$.

Montrons ensuite que $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f^3)$. On sait déjà que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f^3) \subset \mathbb{R}^4$.

Montrons alors l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathbb{R}^4$, on cherche $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f^3)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse : C'est à nous de "deviner" les expressions de x_1 et x_2 . On peut remarquer que $f + f^4 = 0$ implique que pour tout $z \in E$, $f(z) + f^4(z) = 0$. Cela équivaut à $f(z + f^3(z)) = 0$ soit $z + f^3(z) \in \text{Ker}(f)$. Ainsi un élément qui s'écrit $z + f^3(z)$ est dans $\text{Ker}(f)$. Cela nous donne l'idée de poser $x_1 = x + f^3(x)$. Pour x_2 , on n'a plus le choix et on pose $x_2 = x - x_1 = -f^3(x) = f^3(-x)$.

Synthèse : Posons $x = x + f^3(x) + f^3(-x)$. On a clairement $f^3(-x) \in \text{Im}(f^3)$, de plus $f(x + f^3(x)) = f(x) + f^4(x) = 0$ donc $x + f^3(x) \in \text{Ker}(f)$. On a bien écrit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f^3)$.

On en conclut qu'on a $\mathbb{R}^4 \subset \text{Ker}(f) + \text{Im}(f^3)$. Ainsi $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f^3)$.

(b) On a $\text{Im}(f^3) \subset \text{Im}(f)$. En effet, soit $y \in \text{Im}(f^3)$ alors il existe $z \in E$ tel que $y = f^3(z)$. On peut écrire que $y = f(f^2(z)) \in \text{Im}(f)$ d'où l'inclusion $\boxed{\text{Im}(f^3) \subset \text{Im}(f)}$.

De plus, d'après la question précédente $\dim(\text{Im}(f^3)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(f))$. Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Im}(f))$. Ainsi $\boxed{\dim(\text{Im}(f^3)) = \dim(\text{Im}(f))}$.

L'inclusion précédente et l'égalité des dimensions nous permet de conclure que $\boxed{\text{Im}(f^3) = \text{Im}(f)}$.

3. (a) Pour commencer, on remarque que grâce au théorème du rang, on a : $\boxed{\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))}$.

Il reste à montrer que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. On a déjà $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset E$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$, on cherche $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse C'est à nous de "deviner" les expressions de x_1 et x_2 . On peut remarquer que $f^3 + 4f^2 + 3f = 0$ implique que pour tout $z \in E$, $f^3(z) + 4f^2(z) + 3f(z) = 0$. Cela équivaut à $f(f^2(z) + 4f(z) + 3z) = 0$ soit $f^2(z) + 4f(z) + 3z \in \text{Ker}(f)$. Ainsi un élément qui s'écrit $f^2(z) + 4f(z) + 3z$ est dans $\text{Ker}(f)$.

Cela nous donne l'idée de poser $x_1 = \frac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3}$.

Pour x_2 , on n'a plus le choix et on pose $x_2 = x - x_1 = x - \frac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3} = -\frac{f^2(x) + 4f(x)}{3}$.

Synthèse Posons $x = \frac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3} + \left(-\frac{f^2(x) + 4f(x)}{3}\right)$.

On a, d'une part, $-\frac{f^2(x) + 4f(x)}{3} = f\left(-\frac{f(x) + 4x}{3}\right) \in \text{Im}(f)$.

D'autre part, on a :

$$f\left(\frac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3}\right) = \frac{1}{3}(f^3(x) + 4f^2(x) + 3f(x)) = 0.$$

Ainsi $\frac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3} \in \text{Ker}(f)$.

On a bien montré l'inclusion $E \subset \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. On a donc l'égalité $\boxed{E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)}$.

(b) Commençons par montrer que $\text{Ker}(f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E) = \{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ alors en particulier $x \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ soit $(f + \text{Id}_E)(x) = 0$ soit $f(x) = -x$. De la même manière, $x \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ signifie $f(x) = -3x$. On a donc $-x = -3x$ soit $x = 0$. Ainsi $\boxed{\text{Ker}(f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E) = \{0\}}$ et la somme est donc directe.

Montrons ensuite que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$. Raisonnons pour cela par double inclusion :

▷ $\text{Ker}(f + \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f)$. En effet, soit $x \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ alors $f(x) = -x$ soit $x = -f(x) = f(-x) \in \text{Im}(f)$. De la même façon, on a $\text{Ker}(f + 3\text{Id}_E) \subset \text{Im}(f)$. En effet, soit $x \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ alors $f(x) = -3x$ soit $x = -\frac{1}{3}f(x) = f(-\frac{1}{3}x) \in \text{Im}(f)$.

Ainsi $\boxed{\text{Ker}(f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E) \subset \text{Im}(f)}$.

◁ Montrons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$. Soit $x \in \text{Im}(f)$, on cherche $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \times \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse Encore une fois, à nous de deviner x_1 et x_2 . On doit avoir $x = x_1 + x_2$ donc $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$. Or on veut $x_1 \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ donc $f(x_1) = -x_1$ et de même on veut $x_2 \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ donc $f(x_2) = -3x_2$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ -x_1 - 3x_2 = f(x) \end{cases}$$

On résout le système et on obtient nos candidats pour x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{3x + f(x)}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-x - f(x)}{2}.$$

Synthèse On pose $x = \frac{3x + f(x)}{2} + \frac{-x - f(x)}{2}$. Il reste à vérifier que $x_1 = \frac{3x + f(x)}{2} \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ et que

$x_2 = \frac{-x - f(x)}{2} \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$. On a, d'une part :

$$f(x_1) = \frac{1}{2}f(3x + f(x)) = \frac{1}{2}(3f(x) + f^2(x))$$

Or $x \in \text{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$, ainsi on obtient avec la relation $f^3 + 4f^2 + 3f = 0$:

$$f(x_1) = \frac{1}{2}(3f^2(z) + f^3(z)) = \frac{1}{2}(3f^2(z) - 4f^2(z) - 3f(z)) = \frac{1}{2}(-f^2(z) - 3f(z)) = \frac{-3x - f(x)}{2} = -x_1.$$

On a obtenu $f(x_1) = -x_1$ donc $x_1 \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

On a, d'autre part :

$$f(x_2) = -\frac{1}{2}f(x + f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) + f^2(x))$$

Or $x \in \text{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$, ainsi on obtient avec la relation $f^3 + 4f^2 + 3f = 0$:

$$f(x_2) = -\frac{1}{2}(f^2(z) + f^3(z)) = -\frac{1}{2}(f^2(z) - 4f^2(z) - 3f(z)) = -\frac{1}{2}(-3f^2(z) - 3f(z)) = \frac{3x + 3f(x)}{2} = -3x_2.$$

On a obtenu $f(x_2) = -3x_2$ donc $x_2 \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$.

En conclusion $\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)}$.

Les deux inclusions nous permettent d'affirmer que $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)}$. Comme on a également montré que la somme était directe, on peut conclure que $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)}$.

4. (a) On sait que $\dim(E) = n$ et que $\text{Im}(f) \subset E$ donc $\text{rg}(f) \leq n$. De plus, f n'est pas l'endomorphisme nul donc $\text{rg}(f) > 0$. Comme f n'est pas bijectif, $\text{rg}(f) \neq n$ car sinon f serait surjectif et donc bijectif car les deux sont équivalents en dimension finie. Ainsi $\boxed{\text{rg}(f) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$.
- (b) $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension r , il existe donc une base de $\text{Im}(f)$ de cardinal r , on la note (e_1, \dots, e_r) . D'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = n - r$ donc $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel de dimension $n - r$, il existe donc une base de $\text{Ker}(f)$ de cardinal $n - r$, on la note (a_1, \dots, a_{n-r}) .
- (c) Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $e_i \in \text{Im}(f)$ donc il existe $b_i \in E$ tel que $e_i = f(b_i)$.
- (d) Montrons que la famille $(a_1, \dots, a_{n-r}, b_1, \dots, b_r)$ est une famille libre de E . Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^r \mu_j b_j = 0.$$

Appliquons f à cette égalité, par linéarité de f , on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(a_i) + \sum_{j=1}^r \mu_j f(b_j) = 0,$$

or pour tout $i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$, $f(a_i) = 0$ (car vecteurs du noyau) et pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f(b_j) = e_j$, on obtient donc :

$$\sum_{j=1}^r \mu_j e_j = 0.$$

Comme la famille (e_1, \dots, e_r) est une base de $\text{Im}(f)$, elle est libre et donc $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$. Il ne nous reste donc que :

$$\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i = 0$$

De même, la famille (a_1, \dots, a_{n-r}) est une base de $\text{Ker}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$.

On en déduit donc que la famille $(a_1, \dots, a_{n-r}, b_1, \dots, b_r)$ est libre dans E . De plus, elle est de cardinal $n - r + r = n = \dim(E)$, on en conclut que c'est une $\boxed{\text{base de } E}$.

- (e) On cherche un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \text{Ker}(f) \oplus F$. Posons

$$F = \text{Vect}(b_1, \dots, b_r).$$

La famille (b_1, \dots, b_r) est une base de F . Sa juxtaposition avec la base (a_1, \dots, a_{n-r}) de $\text{Ker}(f)$ donne une base de E (d'après la question précédente) donc F est un $\boxed{\text{supplémentaire de } \text{Ker}(f) \text{ dans } E}$.