

Devoir maison n° 11

Ce devoir maison est composée de deux exercices et d'un problème facultatif. Bon courage !

Exercice 1

1. **Un exemple** - Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z)$$

- (a) Vérifier que f est linéaire.
- (b) Calculer $f \circ f$.
- (c) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- (d) Vérifier que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- (e) Montrer que

$$\text{Vect}((3, 2, 1)) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$$

2. **Un premier résultat** - Dans cette question E est un espace vectoriel de dimension finie égale à 3.

Soit f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \theta$ (θ est l'endomorphisme nul).

- (a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- (b) En déduire que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.
Il existe donc x un vecteur non nul de $\text{Im}(f)$. Soit $a \in E$ tel que $x = f(a)$.
- (c) Justifier que $\text{Vect}(x) = \text{Im}(f)$.
- (d) Montrer que

$$\text{Vect}(a) \oplus \text{Ker}(f) = E$$

3. **Un deuxième résultat** - Dans cette question E est un espace vectoriel de dimension finie égale à 4.

Soit f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \theta$.

- (a) Montrer que $\dim(\text{Im}(f)) \in \{1, 2\}$.

Dans la suite on se place dans le cas $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

- (b) Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.
- (c) Soit (x_1, x_2) une base de $\text{Im}(f)$ et $a_1 \in E$ et $a_2 \in E$ tels que $x_1 = f(a_1)$ et $x_2 = f(a_2)$.
Montrer que (a_1, a_2, x_1, x_2) est une base de E .
- (d) Montrer finalement que

$$\text{Vect}(a_1, a_2) \oplus \text{Ker}(f) = E$$

Exercice 2 Les polynômes de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des réels (distincts deux à deux).

On définit n polynômes P_1, \dots, P_n par

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad P_j = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - a_k}{a_j - a_k}$$

1. **Un exemple** : on pose dans cette question $n = 3$. On considère donc 3 réels a_1, a_2 et a_3 tels que $a_1 < a_2 < a_3$. Déterminer P_1, P_2 et P_3 .
2. (a) Déterminer pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le degré de P_i ainsi que ses racines.
(b) Calculer, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la valeur de $P_i(a_j)$.
3. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On lui associe le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$Q = \sum_{i=1}^n P(a_i) P_i$$

- (a) Calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la valeur de $Q(a_k)$.
 - (b) En déduire que $P = Q$.
4. Montrer finalement que la famille (P_1, P_2, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et déterminer les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans cette base.

Problème 1 FACULTATIF

1. Dans cette question on se place sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 et l'on définit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ par

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, t) = (x + y, z - t, 2x + 2y - z + t, x + y + z - t).$$

- (a) Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^4 .
- (b) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- (c) Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.

Dans toute la suite de l'exercice E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f est un endomorphisme de E .

2. Dans cette question on suppose que $f + f^4 = 0$. (On notera bien que ce 0 désigne l'endomorphisme nul de E .)
 - (a) Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f^3)$.
 - (b) Vérifier ensuite que $\text{Im}(f^3) = \text{Im}(f)$.
3. Dans cette question on suppose que $f^3 + 4f^2 + 3f = 0$. (On notera bien que ce 0 désigne l'endomorphisme nul de E .)
 - (a) Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - (b) Montrer ensuite que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$.
4. Dans cette question on suppose que f n'est ni bijectif ni l'endomorphisme nul.
 - (a) Justifier que $\text{rg}(f) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On pose $r = \text{rg}(f)$.
 - (b) Justifier qu'il existe (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Im}(f)$ et (a_1, \dots, a_{n-r}) une base de $\text{Ker}(f)$.
 - (c) Justifier que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $b_i \in E$ tel que $f(b_i) = e_i$.
 - (d) Montrer que $(a_1, \dots, a_{n-r}, b_1, \dots, b_r)$ est une base de E .
 - (e) Déterminer alors un sous-espace vectoriel supplémentaire à $\text{Ker}(f)$.