Devoir maison n° 11

Ce devoir maison est composée de deux exercices. Le premier exercice est obligatoire et le deuxième facultatif.
Le deuxième exercice n'est pas plus difficile que le premier et c'est un bon entraînement pour bien comprendre comment appliquer les différentes versions du théorème de limite monotone.

Exercice 1

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n-ième expérience, c'est-à-dire après le tirage d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k-ième tirage ».

1. (a) Justifier que $X_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. Donner la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
   (b) Exprimer les événements $[X_2 = 1], [X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2.
   (c) Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, 3]\!]$. En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$.
   (b) Montrer que $P([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$ De même, calculer $P([X_n = n+1])$.
3. (a) Établir pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, les égalités suivantes :
$$P_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k]) = \frac{k-1}{n+2} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = k]) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$
   (b) En déduire pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, une relation entre $P([X_{n+1} = k]), P([X_n = k])$ et $P([X_n = k-1])$.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
4. Compléter la fonction `Python` suivant afin qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n pour un entier n donné.

```
import numpy.random as rd
def simulationX(n):
    r=1
    b=1
    for k in range(n):
        if rd.random()<r/(r+b):
            .....................
        else :
            .....................
    x =...............
    return x
```

Exercice 2 *FACULTATIF*

On dispose d'un dé comportant une face rouge et cinq faces vertes. On réalise une suite illimitée de lancers indépendants les uns des autres.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note R_k (resp. V_k) l'événement : «on obtient une face rouge (resp. verte) lors du k-ième lancer».
On note R l'événement : «on obtient au moins une fois la face rouge».
On se propose de calculer la probabilité $P(R)$ par trois méthodes différentes.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n : «on obtient que des faces vertes au cours des n premiers lancers».
   Calculer $P(A_n)$, exprimer l'événement $\overline{R}$ à l'aide des événements A_n, déterminer la nature de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire $P\left(\overline{R}\right)$ puis $P(R)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit B_n : «on obtient au moins une fois la face rouge au cours des n premiers lancers».
   Calculer $P(B_n)$, exprimer l'événement R à l'aide des événements B_n, déterminer la nature de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire $P(R)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit C_n : «on obtient la face rouge pour la première fois au n-ième lancer».
   Calculer $P(C_n)$, exprimer l'événement R à l'aide des événements C_n, déterminer la nature de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire $P(R)$.

