Corrigé du DM n° 10

Exercice 1 *Inspiré d'EDHEC voie S 1999*

1. **Etude de g_n**
   (a) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ étant continue sur $[n, +\infty[$, la fonction g_n est l'unique primitive de f qui s'annule en n (théorème fondamental). En particulier, g_n est $\boxed{\text{de classe } C^1 \text{ sur } [n, +\infty[}$, et pour tout $x \in [n, +\infty[$, $\boxed{g_n'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{x^2}}$.

   (b) Soit $x \geqslant n$ alors pour tout $t \in [n, x]$, $n \leqslant t$, ainsi par croissance de la fonction exponentielle on a $\mathrm{e}^{n^2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2}$. Puis par croissance de l'intégrale (avec $n \leqslant x$), on obtient :

   $$\int_n^x \mathrm{e}^{n^2}\mathrm{d}t \leqslant g_n(x)$$

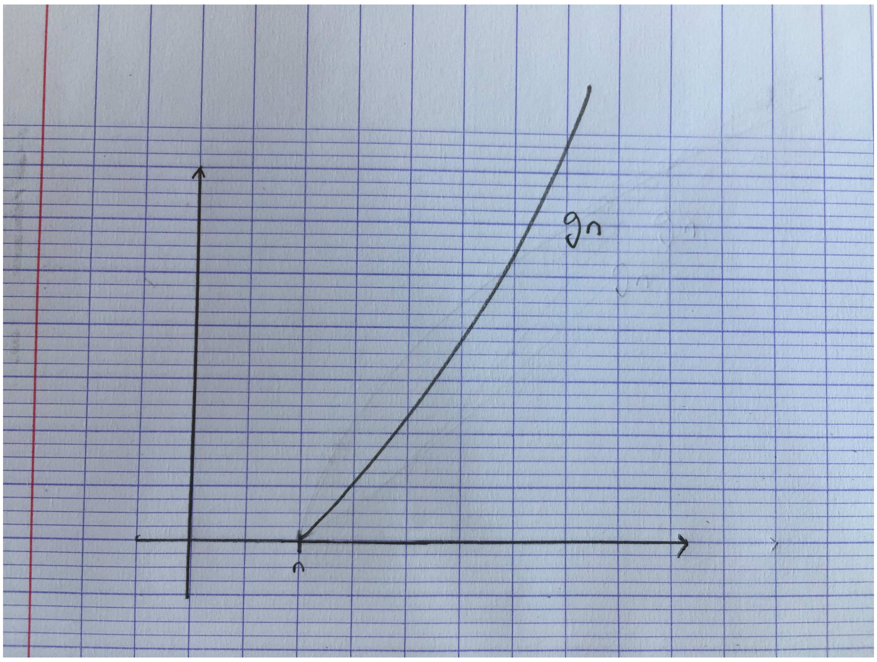
   d'où $(x-n)\mathrm{e}^{n^2} \leqslant g_n(x)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-n)\mathrm{e}^{n^2} = +\infty$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty}$ d'après le théorème de comparaison.

   (c) D'après la question 1.(a), pour tout $x \in [n, +\infty[$, $g_n'(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$ donc la fonction g_n est strictement croissante sur cet intervalle. On remarque que$g_n(n) = 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	n	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	
Variations de g_n	0 ↗	$+\infty$

   (d) La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in [n, +\infty[$, $g_n'(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. On a donc que g_n' est de classe $\mathcal{C}^1$ et que donc la fonction g_n est C^2 sur $[n, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [n, +\infty[$, $g_n''(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$. Donc la fonction g_n est $\boxed{\text{convexe sur } [n, +\infty[}$.

   (e) L'équation de la tangente à la courbe de g_n au point d'abscisse n est donné par la formule $y = g_n'(n)(x-n) + g_n(n)$. Soit l'équation $\boxed{y = \mathrm{e}^{n^2}(x-n)}$. Le coefficient directeur e^{n^2} est très grand donc la pente de la tangente en $x = n$ est "très" forte. On a donc l'allure suivante :



(f) La fonction g_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Comme $1 \in [0, +\infty[$, il existe un unique $x_n \in [n, +\infty[$ tel que $\boxed{g_n(x_n) = 1}$ d'après le théorème de la bijection.

2. **Etude la suite** (x_n)

(a) Par définition de x_n on a : $x_n \in [n, +\infty[$ donc $x_n \geqslant n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.

(b) Par définition de la suite (x_n), on a : $\displaystyle\int_n^{x_n} e^{t^2} dt = 1$. Or $\forall t \in [n, x_n]$, on a par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{n^2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2} \leqslant \mathrm{e}^{x_n^2}$. Ainsi par croissance de l'intégrale sur $[n, x_n]$,

$$\int_n^{x_n} \mathrm{e}^{n^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{x_n} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{x_n} \mathrm{e}^{x_n^2} \mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{(x_n - n)\,\mathrm{e}^{n^2} \leqslant 1 \leqslant (x_n - n)\,\mathrm{e}^{x_n^2}}.$$

Puis les deux inégalités $(x_n - n)\,\mathrm{e}^{n^2} \leqslant 1$ et $1 \leqslant (x_n - n)\,\mathrm{e}^{x_n^2}$ donnent

$$(x_n - n) \leqslant \mathrm{e}^{-n^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant (x_n - n)$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant (x_n - n) \leqslant \mathrm{e}^{-n^2}.}$$

(c) L'encadrement de la question précédente donne : $n + \mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant x_n \leqslant n + \mathrm{e}^{-n^2}$ d'où

$$1 + \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{n} \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{n}.$$

Or d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2}}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2}}{n} = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x_n^2} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{n} = 1$.

On conclut grâce au théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$ d'où $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$.

3. **Etude d'une série**

(a) En utilisant le deuxième encadrement de la question 2.(b), on peut écrire que

$$0 \leqslant n\,(x_n - n) \leqslant n\mathrm{e}^{-n^2}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-n^2} = 0$ par croissance comparée, on montre donc avec le théorème d'encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(x_n - n) = 0}$.

(b) En utilisant de nouveau le deuxième encadrement de la question 2.(b), on peut écrire que

$$\frac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}} \leqslant \frac{x_n - n}{\mathrm{e}^{-n^2}} \leqslant 1.$$

Pour obtenir l'équivalent demandé, il faut donc montrer que $\dfrac{e^{-x_n^2}}{e^{-n^2}} = e^{-x_n^2+n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ i.e. que $n^2 - x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. L'astuce est d'écrire que :

$$n^2 - x_n^2 = (n - x_n)(n + x_n) = n(n - x_n) + x_n(n - x_n).$$

Or d'après la question 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n - x_n) = 0$, de plus d'après la question 2.(c),

$$x_n(n - x_n) \sim n(n - x_n)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n - x_n) = 0$. D'où le résultat en appliquant de nouveau le théorème d'encadrement.

(c) La série de terme général e^{-n^2} converge car $\mathrm{e}^{-n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, en effet par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-n^2} = 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $2 > 1$. Comme $x_n - n$ est équivalent au terme général d'une série convergente et que les deux séries sont à termes positifs ($x_n \geqslant n$), on en déduit que la série de terme général $x_n - n$ est elle-même $\boxed{\text{convergente}}$.

Exercice 2

1. On commence par remarquer que les fonctions h_1 et h_2 sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $h_1^{(k)}(x) = \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right)(x-1)^{n-k}$.
On pose pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$: « $h_1^{(k)}(x) = \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right)(x-1)^{n-k}$ ».
Initialisation $(k = 1)$ On $h_1^{(1)}(x) = h_1'(x) = n(x-1)^{n-1}$ et $\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{0}(n-i)\right)(x-1)^{n-1} = n(x-1)$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
h_1^{(k+1)}(x) &= (h_1^{(k)})'(x)\\
&= \left(\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right)(x-1)^{n-k})' \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \left(\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right)\times(n-k)(x-1)^{n-k-1}\\
&= \left(\prod_{i=0}^{k}(n-i)\right)(x-1)^{n-(k+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
En résumé,

$$\text{Pour } k = 0, \quad h_1^{(0)}(x) = h_1(x) = (x-1)^n \quad \text{et pour} \quad k \in [\![1, n]\!], \quad h_1^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right)(x-1)^{n-k}.$$

On montre de la même manière par récurrence que :

$$\text{Pour } k = 0, \quad h_2^{(0)}(x) = h_2(x) = (x+1)^n \quad \text{et pour} \quad k \in [\![1, n]\!], \quad h_2^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right)(x+1)^{n-k}.$$

Remarque On aurait aussi pu écrire ses formules avec des factorielles (peut-être plus simple)

$$h_1^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \quad \text{et} \quad h_2^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$$

2. On $f = h_1 h_2$ donc par produit, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc bien appliquer la formule de Leibniz. Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\left(\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\right) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

On a alors d'après la formule de Leibniz, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h_1^{(k)} h_2^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \times \frac{n!}{(n-(n-k))!}(x+1)^{n-(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(x+1)^{k} \\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}(x-1)^{n-k}(x+1)^{k} \\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^{k}
\end{aligned}$$

En résumé, pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^{k}.$$

3. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ((x-1)(x+1))^n = \left(x^2-1\right)^n.$$

(b) En utilisant, la formule du binôme de Newton, on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{2k}(-1)^{n-k}.$$

Pour calculer la dérivée n-ième de f, il suffit donc de calculer la dérivée n-ième de chacun des termes de la somme. Tout d'abord remarquons que pour $n > 2k$, $(x^{2k})^{(n)} = 0$ donc les termes de la somme d'indice $k < \frac{n}{2}$ sont nuls. Ainsi par linéarité de la dérivation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n}\binom{n}{k}(x^{2k})^{(n)}(-1)^{n-k}.$$

On a de plus pour $k \geqslant \frac{n}{2}$,

$$(x^{2k})^{(n)} = 2k(2k-1)...(2k-(n-1))x^{2k-n} = \frac{(2k)!}{(2k-n)!}x^{2k-n}.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}x^{2k-n}(-1)^{n-k} = n!\sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{n!(2k-n)!}x^{2k-n}(-1)^{n-k},$$

soit

$$f^{(n)}(x) = n!\sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n}\binom{n}{k}\binom{2k}{n}x^{2k-n}(-1)^{n-k}.$$

(c) Evaluons les relations ($\star$) et ($\star\star$) pour $x = 1$, on obtient pour la relation ($\star$) :

$$f^{(n)}(1) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (0)^{n-k}(1+1)^k.$$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf celui d'indice $k = n$, on a alors

$$f^{(n)}(1) = n! \binom{n}{n}^2 2^n = n!2^n.$$

On obtient pour la relation ($\star\star$)

$$f^{(n)}(1) = n! \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{2k}{n} 1^{2k-n}(-1)^{n-k} = n! \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{2k}{n}(-1)^{n-k}.$$

On obtient alors l'égalité :

$$\sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{2k}{n}(-1)^{n-k} = 2^n.$$