Corrigé du DM n° 10

Exercice 1

1. **Un exemple -**

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

L'application f est donc bien $\boxed{\text{linéaire}}$.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\ &= f(x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z) \\ &= (x + y - 2z + x + y - 2z - 2(x + y - 2z), *, *) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Cela signifie que $f \circ f$ est $\boxed{\text{l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3}$.

(c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x + y - 2z = 0 \iff x = -y + 2z$. Ainsi on trouve

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{(-y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{Vect}((-1, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

La famille $(-1, 1, 0), (2, 0, 1)$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$ par définition et libre car composée de deux vecteurs non-colinéaires. Ainsi c'est une $\boxed{\text{base de } \operatorname{Ker}(f)}$.

Comme la famille $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\ &= \operatorname{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 1), (-2, -2, -2)) \\ &= \operatorname{Vect}((1, 1, 1)). \end{aligned}$$

La famille $((1, 1, 1))$ est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ par définition et libre car composée d'un seul vecteur, qui est non-nul. Donc c'est une $\boxed{\text{base de } \operatorname{Im}(f)}$.

(d) On a $(1, 1, 1) = (-1, 1, 0) + (2, 0, 1)$. Ainsi $(1, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(f)$ et donc $\operatorname{Vect}(1, 1, 1) \subset \operatorname{Ker}(f)$ car le noyau est un espace vectoriel. On a bien : $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

Remarque : On aurait aussi pu calculer $f(1, 1, 1)$ et vérifier que cela faisait bien $0_{\mathbb{R}^3}$ pour montrer que $(1, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(f)$.

(e) D'après la question 1.(c), on voit que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$. De plus la famille $((3, 2, 1))$ est génératrice de $\operatorname{Vect}((3, 2, 1))$ et libre car composée d'un unique vecteur, qui est non-nul. Donc cette famille est une base de $\operatorname{Vect}((3, 2, 1))$. Ainsi $\dim(\operatorname{Vect}((3, 2, 1))) = 1$. On obtient donc

$$\dim(\operatorname{Vect}((3, 2, 1))) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Soit $u \in \operatorname{Vect}((3, 2, 1)) \cap \operatorname{Ker}(f)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(3, 2, 1) = (3\lambda, 2\lambda, \lambda)$. De plus, $u \in \operatorname{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ soit $f(3\lambda, 2\lambda, \lambda) = (0, 0, 0)$ i.e. $(3\lambda + 2\lambda - 2\lambda, 3\lambda + 2\lambda - 2\lambda, 3\lambda + 2\lambda - 2\lambda) = (0, 0, 0)$. On en déduit que $3\lambda = 0$ puis que $u = (0, 0, 0)$. Ainsi on a montré que

$$\operatorname{Vect}((3, 2, 1)) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\operatorname{Vect}((3, 2, 1)) \oplus \operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}^3}$

2. **Un premier résultat -**
   (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi
   $$f(x) = f(f(a)) = f \circ f(a) = \theta(a) = 0_E.$$
   Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a ainsi montré que $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.

   (b) Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1$. De plus d'après ce qui précède et le théorème du rang
   $$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) \quad \text{i.e.} \quad 2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 3.$$
   On en déduit que
   $$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \frac{3}{2}$$
   Ainsi on a bien $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1}$.

   (c) Comme $x \in \mathrm{Im}(f)$ on en déduit que $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel). De plus, comme x est un vecteur non-nul, on a $\dim(\mathrm{Vect}(x)) = 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(f).}$

   (d) Comme $f(a) \neq 0_E$ alors $a \neq 0_E$ et donc $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$. De plus d'après le théorème du rang
   $$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 2 = 1.$$
   Ainsi on en déduit que
   $$\dim(\mathrm{Vect}(a)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(E)$$
   Soit $y \in \mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda a$. De plus, $y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(y) = 0_E$. Or $f(y) = f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda x$. On en déduit que $\lambda x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$ alors $\lambda = 0$ et donc $y = 0_E$. On a ainsi montré que
   $$\mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$
   On a donc bien $\boxed{\mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E}$.

3. **Un deuxième résultat -**
   (a) Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1$. Ainsi d'après ce qui précède et le théorème du rang
   $$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f))$$
   On en déduit que
   $$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2 \text{ i.e.} \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1, 2\}.$$

   (b) On a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang
   $$\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$
   Ainsi on a montré que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)}$.

   (c) Montrons que la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que
   $$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E.$$
   En appliquant f on obtient
   $$\begin{aligned} f(0_E) &= f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 f(f(a_1)) + \mu_2 f(f(a_2)) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$
   On obtient donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$. Comme la famille (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En injectant cela dans $(\star)$, on obtient $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E$, ce qui nous donne pour les mêmes raisons que précédemment $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Ainsi la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. De plus elle a $4 = \dim(E)$ éléments. C'est donc une $\boxed{\text{base de } E}$.

   (d) Comme la famille (a_1, a_2) est une sous-famille de (a_1, a_2, x_1, x_2), elle est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(a_1, a_2)$. De plus (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. Donc (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En concaténant ces deux bases, on a obtenu une base de E (d'après la question précédente) donc on a bien $\boxed{\mathrm{Vect}(a_1, a_2) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E}$.

Exercice 2 *Inspiré d'EDHEC voie S 1999*

1. **Etude de g_n**

   (a) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ étant continue sur $[n, +\infty[$, la fonction g_n est l'unique primitive de f qui s'annule en n (théorème fondamental). En particulier, g_n est $\boxed{\text{de classe } C^1 \text{ sur } [n, +\infty[}$, et pour tout $x \in [n, +\infty[$, $\boxed{g_n'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{x^2}}$.

   (b) Soit $x \geqslant n$ alors pour tout $t \in [n, x]$, $n \leqslant t$, ainsi par croissance de la fonction exponentielle on a $\mathrm{e}^{n^2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2}$. Puis par croissance de l'intégrale (avec $n \leqslant x$), on obtient :

$$\int_n^x \mathrm{e}^{n^2} \mathrm{d}t \leqslant g_n(x)$$

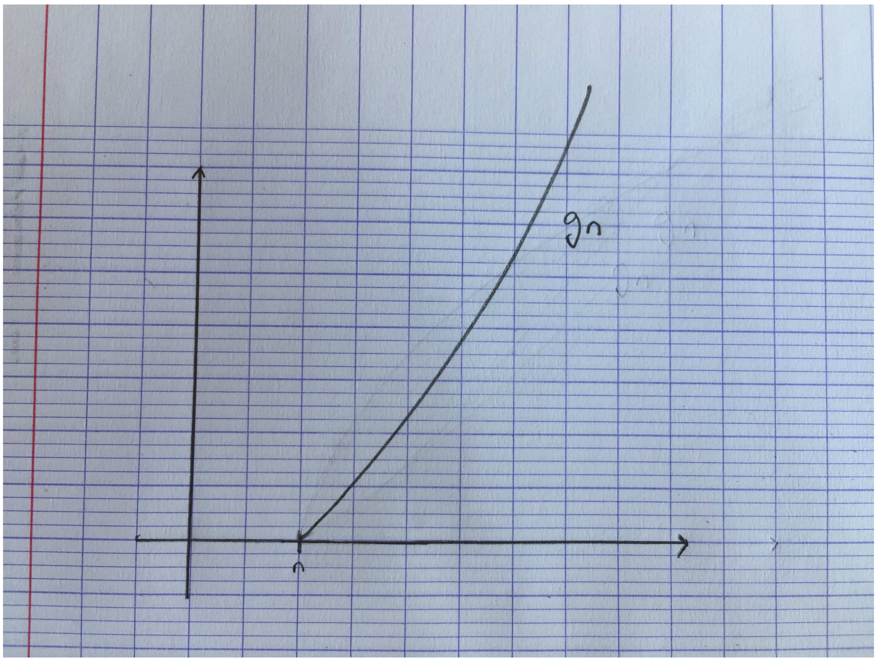
   d'où $(x - n)\mathrm{e}^{n^2} \leqslant g_n(x)$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - n)\mathrm{e}^{n^2} = +\infty$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty}$ d'après le théorème de comparaison.

   (c) D'après la question 1.(a), pour tout $x \in [n, +\infty[$, $g_n'(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$ donc la fonction g_n est strictement croissante sur cet intervalle. On remarque que$g_n(n) = 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	n	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	
Variations de g_n	0 $\nearrow$	$+\infty$

   (d) La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in [n, +\infty[$, $g_n'(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. On a donc que g_n' est de classe $\mathcal{C}^1$ et que donc la fonction g_n est C^2 sur $[n, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [n, +\infty[$, $g_n''(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$. Donc la fonction g_n est $\boxed{\text{convexe sur } [n, +\infty[}$.

   (e) L'équation de la tangente à la courbe de g_n au point d'abscisse n est donné par la formule $y = g_n'(n)(x - n) + g_n(n)$. Soit l'équation $\boxed{y = \mathrm{e}^{n^2}(x - n)}$. Le coefficient directeur e^{n^2} est très grand donc la pente de la tangente en $x = n$ est "très" forte. On a donc l'allure suivante :



   (f) La fonction g_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Comme $1 \in [0, +\infty[$, il existe un unique $x_n \in [n, +\infty[$ tel que $\boxed{g_n(x_n) = 1}$ d'après le théorème de la bijection.

2. **Etude la suite** (x_n)
   (a) Par définition de x_n on a : $x_n \in [n, +\infty[$ donc $x_n \geqslant n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.

   (b) Par définition de la suite (x_n), on a : $\displaystyle\int_n^{x_n} e^{t^2} dt = 1$. Or $\forall t \in [n, x_n]$, on a par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{n^2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2} \leqslant \mathrm{e}^{x_n^2}$. Ainsi par croissance de l'intégrale sur $[n, x_n]$,

$$\int_n^{x_n} \mathrm{e}^{n^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{x_n} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{x_n} \mathrm{e}^{x_n^2} \mathrm{d}t$$

   d'où

$$\boxed{(x_n - n)\,\mathrm{e}^{n^2} \leqslant 1 \leqslant (x_n - n)\,\mathrm{e}^{x_n^2}}.$$

   Puis les deux inégalités $(x_n - n)\,\mathrm{e}^{n^2} \leqslant 1$ et $1 \leqslant (x_n - n)\,\mathrm{e}^{x_n^2}$ donnent

$$(x_n - n) \leqslant \mathrm{e}^{-n^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant (x_n - n)$$

   d'où

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant (x_n - n) \leqslant \mathrm{e}^{-n^2}.}$$

   (c) L'encadrement de la question précédente donne : $n + \mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant x_n \leqslant n + \mathrm{e}^{-n^2}$ d'où

$$1 + \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{n} \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{n}.$$

   Or d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2}}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2}}{n} = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x_n^2} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{n} = 1$.
   On conclut grâce au théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$ d'où $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$.

3. **Etude d'une série**
   (a) En utilisant le deuxième encadrement de la question 2.(b), on peut écrire que

$$0 \leqslant n\,(x_n - n) \leqslant n\mathrm{e}^{-n^2}.$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-n^2} = 0$ par croissance comparée, on montre donc avec le théorème d'encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(x_n - n) = 0}$.

   (b) En utilisant de nouveau le deuxième encadrement de la question 2.(b), on peut écrire que

$$\frac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}} \leqslant \frac{x_n - n}{\mathrm{e}^{-n^2}} \leqslant 1.$$

   Pour obtenir l'équivalent demandé, il faut donc montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}} = e^{-x_n^2+n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ i.e. que $n^2 - x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   L'astuce est d'écrire que :

$$n^2 - x_n^2 = (n - x_n)\,(n + x_n) = n\,(n - x_n) + x_n\,(n - x_n)\,.$$

   Or d'après la question 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(n - x_n) = 0$, de plus d'après la question 2.(c),

$$x_n\,(n - x_n) \sim n\,(n - x_n)$$

   et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n - x_n) = 0$. D'où le résultat en appliquant de nouveau le théorème d'encadrement.

   (c) La série de terme général e^{-n^2} converge car $\mathrm{e}^{-n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, en effet par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-n^2} = 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $2 > 1$. Comme $x_n - n$ est équivalent au terme général d'une série convergente et que les deux séries sont à termes positifs ($x_n \geqslant n$), on en déduit que la série de terme général $x_n - n$ est elle-même $\boxed{\text{convergente}}$.

Exercice 3 *Les polynômes de Lagrange*

1. On a :

$$P_1 = \frac{x-a_2}{a_1-a_2} \times \frac{x-a_3}{a_1-a_3} = \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}.$$
$$P_2 = \frac{x-a_1}{a_2-a_1} \times \frac{x-a_3}{a_2-a_3} = \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}.$$
$$P_3 = \frac{x-a_1}{a_3-a_1} \times \frac{x-a_2}{a_3-a_2} = \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

2. (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, en utilisant les propriétés du degré, on obtient :

$$\deg(Pi) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \deg\left(\frac{x-a_k}{a_i-a_k}\right) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} 1 = n-1.$$

On en déduit que chaque polynôme P_i possède au plus $n-1$ racines. On détermine les racines des P_i grâce à leur expression qui nous est donnée sous forme factorisée.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, les racines de P_i sont les réels a_j avec $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$. En effet, pour tout $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $P_i(a_j) = 0$.
Ainsi P_i a pour racines $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Ces $n-1$ réels sont bien toutes les racines de P_i car il en a, au plus, $n-1$.

(b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et soit $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ alors $P_i(a_j) = 0$.
Pour $j = i$, on a :

$$P_i(a_i) = \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \frac{a_i-a_k}{a_i-a_k} = \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} 1 = 1.$$

3. (a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$Q(a_k) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)P_i(a_k) = P(a_k)P_k(a_k) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} P(a_i)P_i(a_k) = P(a_k)\times 1 + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} P(a_i)\times 0 = P(a_k).$$

(b) Posons le polynôme $R = P - Q$, le polynôme R est au plus de degré $n-1$. De plus, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $R(a_k) = P(a_k) - Q(a_k) = 0$. Ainsi le polynôme R possède n racines, comme il est de degré inférieur ou égal à $n-1$, c'est le polynôme nul donc $\boxed{P = Q}$.

4. La famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. En effet, on a montré à la question 3. que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ s'écrivait :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)P_i.$$

Ainsi $P \in \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_n)$.
De plus, $\mathrm{Card}((P_1, \ldots, P_n)) = n$ et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[x]) = n$ donc cette famille est en fait une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_{n-1}[x]}$.
Les coordonnées de P dans cette base sont $\boxed{(P(a_1), \ldots, P(a_n))}$.

Problème 1

1. (a) On commence par remarquer que f est bien une application qui va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. Montrons qu'elle est linéaire. Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda X_1 + X_2) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2 - (\lambda t_1 + t_2), 2(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) + \lambda t_1 + t_2, \\ &\quad \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 - (\lambda t_1 + t_2)) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, z_1 - t_1, 2x_1 + 2y_1 - z_1 + t_1, x_1 + y_1 + z_1 - t_1) \\ &\quad + (x_2 + y_2, z_2 - t_2, 2x_2 + 2y_2 - z_2 + t_2, x_2 + y_2 + z_2 - t_2) \\ &= \lambda f(X_1) + f(X_2). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire et il s'agit bien d'un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathbb{R}^4}$.

(b) Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(X) = 0$ soit le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

On échelonne ce système à l'aide du pivot de Gauss : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \\ & & & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système se réduit donc à deux équations $x + y = 0$ et $z - t = 0$ soit $x = -y$ et $z = t$. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(-y, y, z, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\right).$$

La famille $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme elle est constituée de deux vecteurs colinéaires, elle est libre et elle constitue donc une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

Nous avons déterminé une base de $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de cardinal 2 donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, ainsi d'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_4)),$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 2, 1), (0, 1, -1, 1))$$

La famille $((1, 0, 2, 1), (0, 1, -1, 1))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle est de cardinal 2, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(f)}$.

(c) D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Il reste donc à montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ pour avoir que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$X = a(-1, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) \quad \text{et} \quad X = c(1, 0, 2, 1) + d(0, 1, -1, 1)$$

soit

$$(-a, a, b, b) = (c, d, 2c - d, c + d)$$

Par identification, on obtient :

$$a = -c, a = d, b = 2c - d = 3c, b = c + d = 0$$

On obtient alors $a = b = c = d = 0$ et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}}$.

2. (a) Commençons par montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^3) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^3)$ alors en particulier $x \in \mathrm{Im}(f^3)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f^3(z)$. Or $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$ soit $f^4(z) = 0$. Comme on sait que $f + f^4 = 0$, on en déduit que $f(z) = -f^4(z) = 0$. Cela implique, en appliquant deux fois f et parce que $f(0) = 0$, que $f^3(z) = 0$ soit $x = 0$. Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^3) = \{0\}}$.

Montrons ensuite que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f^3)$. On sait déjà que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f^3) \subset \mathbb{R}^4$.
Montrons alors l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathbb{R}^4$, on cherche $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f^3)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse : C'est à nous de "deviner" les expressions de x_1 et x_2. On peut remarquer que $f + f^4 = 0$ implique que pour tout $z \in E$, $f(z) + f^4(z) = 0$. Cela équivaut à $f(z + f^3(z)) = 0$ soit $z + f^3(z) \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi un élément qui s'écrit $z + f^3(z)$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$. Cela nous donne l'idée de poser $x_1 = x + f^3(x)$. Pour x_2, on n'a plus le choix et on pose $x_2 = x - x_1 = -f^3(x) = f^3(-x)$.

Synthèse : Posons $x = x + f^3(x) + f^3(-x)$. On a clairement $f^3(-x) \in \mathrm{Im}(f^3)$, de plus $f(x + f^3(x)) = f(x) + f^4(x) = 0$ donc $x + f^3(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a bien écrit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f^3)$.

On en conclut qu'on a $\mathbb{R}^4 \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f^3)$. Ainsi $\boxed{\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f^3)}$.

(b) On a $\mathrm{Im}(f^3) \subset \mathrm{Im}(f)$. En effet, soit $y \in \mathrm{Im}(f^3)$ alors il existe $z \in E$ tel que $y = f^3(z)$. On peut écrire que $y = f(f^2(z)) \in \mathrm{Im}(f)$ d'où l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(f^3) \subset \mathrm{Im}(f)}$.

De plus, d'après la question précédente $\dim(\mathrm{Im}(f^3)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f^3)) = \dim(\mathrm{Im}(f))}$.

L'inclusion précédente et l'égalité des dimensions nous permet de conclure que $\boxed{\mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Im}(f)}$.

3. (a) Pour commencer, on remarque que grâce au théorème du rang, on a : $\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$.

Il reste à montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On a déjà $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset E$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$, on cherche $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse C'est à nous de "deviner" les expressions de x_1 et x_2. On peut remarquer que $f^3 + 4f^2 + 3f = 0$ implique que pour tout $z \in E$, $f^3(z)+4f^2(z)+3f(z) = 0$. Cela équivaut à $f(f^2(z)+4f(z)+3z) = 0$ soit $f^2(z)+4f(z)+3z \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi un élément qui s'écrit $f^2(z) + 4f(z) + 3z$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Cela nous donne l'idée de poser $x_1 = \dfrac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3}$.

Pour x_2, on n'a plus le choix et on pose $x_2 = x - x_1 = x - \dfrac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3} = -\dfrac{f^2(x) + 4f(x)}{3}$.

Synthèse Posons $x = \dfrac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3} + \left(-\dfrac{f^2(x) + 4f(x)}{3}\right)$.

On a, d'une part, $-\dfrac{f^2(x) + 4f(x)}{3} = f\left(-\dfrac{f(x) + 4x}{3}\right) \in \mathrm{Im}(f)$.

D'autre part, on a :

$$f\left(\frac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(f^3(x) + 4f^2(x) + 3f(x)\right) = 0.$$

Ainsi $\dfrac{f^2(x) + 4f(x) + 3x}{3} \in \mathrm{Ker}(f)$.

On a bien montré l'inclusion $E \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On a donc l'égalité $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)}$.

(b) Commençons par montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$ alors en particulier $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ soit $(f + \mathrm{Id}_E)(x) = 0$ soit $f(x) = -x$. De la même manière, $x \in \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$ signifie $f(x) = -3x$. On a donc $-x = -3x$ soit $x = 0$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E) = \{0\}}$ et la somme est donc directe.

Montrons ensuite que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Raisonnons pour cela par double inclusion :

$\supset$ $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(f)$. En effet, soit $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ alors $f(x) = -x$ soit $x = -f(x) = f(-x) \in \mathrm{Im}(f)$.
De la même façon, on a $\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(f)$. En effet, soit $x \in \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$ alors $f(x) = -3x$ soit $x = -\dfrac{1}{3}f(x) = f(-\dfrac{1}{3}x) \in \mathrm{Im}(f)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(f)}$.

$\subset$ Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, on cherche $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse Encore une fois, à nous de deviner x_1 et x_2. On doit avoir $x = x_1 + x_2$ donc $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$. Or on veut $x_1 \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ donc $f(x_1) = -x_1$ et de même on veut $x_2 \in \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}_E)$ donc $f(x_2) = -3x_2$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ -x_1 - 3x_2 = f(x) \end{cases}$$

On résout le système et on obtient nos candidats pour x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{3x + f(x)}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-x - f(x)}{2}.$$

Synthèse On pose $x = \dfrac{3x + f(x)}{2} + \dfrac{-x - f(x)}{2}$. Il reste à vérifier que $x_1 = \dfrac{3x + f(x)}{2} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ et que

$x_2 = \dfrac{-x-f(x)}{2} \in \mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id}_E)$. On a, d'une part :

$$f(x_1) = \frac{1}{2} f(3x+f(x)) = \frac{1}{2}\left(3f(x)+f^2(x)\right)$$

Or $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$, ainsi on obtient avec la relation $f^3+4f^2+3f=0$:

$$f(x_1) = \frac{1}{2}\left(3f^2(z)+f^3(z)\right) = \frac{1}{2}\left(3f^2(z)-4f^2(z)-3f(z)\right) = \frac{1}{2}\left(-f^2(z)-3f(z)\right) = \frac{-3x-f(x)}{2} = -x_1.$$

On a obtenu $f(x_1) = -x_1$ donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$.
On a, d'autre part :

$$f(x_2) = -\frac{1}{2} f(x+f(x)) = -\frac{1}{2}\left(f(x)+f^2(x)\right)$$

Or $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$, ainsi on obtient avec la relation $f^3+4f^2+3f=0$:

$$f(x_2) = -\frac{1}{2}\left(f^2(z)+f^3(z)\right) = -\frac{1}{2}\left(f^2(z)-4f^2(z)-3f(z)\right) = -\frac{1}{2}\left(-3f^2(z)-3f(z)\right) = \frac{3x+3f(x)}{2} = -3x_2.$$

On a obtenu $f(x_2) = -3x_2$ donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id}_E)$.

En conclusion $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id}_E)}$.

Les deux inclusions nous permettent d'affirmer que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id}_E)}$. Comme on a également montré que la somme était directe, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id}_E)}$.

4. (a) On sait que $\dim(E) = n$ et que $\mathrm{Im}(f) \subset E$ donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$. De plus, f n'est pas l'endomorphisme nul donc $\mathrm{rg}(f) > 0$. Comme f n'est pas bijectif, $\mathrm{rg}(f) \neq n$ car sinon f serait surjectif et donc bijectif car les deux sont équivalents en dimension finie. Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f) \in [\![1, n-1]\!]}$.

(b) $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension r, il existe donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ de cardinal r, on la note $(e_1,\dots,e_r)$. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)-\mathrm{rg}(f) = n-r$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel de dimension $n-r$, il existe donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ de cardinal $n-r$, on la note $(a_1,\dots,a_{n-r})$.

(c) Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $e_i \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $b_i \in E$ tel que $e_i = f(b_i)$.

(d) Montrons que la famille $(a_1,\dots,a_{n-r},b_1,\dots,b_r)$ est une famille libre de E. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $(\mu_1,\dots,\mu_r) \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{r}\mu_j b_j = 0.$$

Appliquons f à cette égalité, par linéarité de f, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i f(a_i) + \sum_{j=1}^{r}\mu_j f(b_j) = 0,$$

or pour tout $i \in [\![1,n-r]\!]$, $f(a_i) = 0$ (car vecteurs du noyau) et pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, $f(b_j) = e_j$, on obtient donc :

$$\sum_{j=1}^{r}\mu_j e_j = 0.$$

Comme la famille $(e_1,\dots,e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, elle est libre et donc $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = 0$. Il ne nous reste donc que :

$$\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i a_i = 0$$

De même, la famille $(a_1,\dots,a_{n-r})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$.
On en déduit donc que la famille $(a_1,\dots,a_{n-r},b_1,\dots,b_r)$ est libre dans E. De plus, elle est de cardinal $n-r+r = n = \dim(E)$, on en conclut que c'est une $\boxed{\text{base de } E}$.

(e) On cherche un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \mathrm{Ker}(f)\oplus F$. Posons

$$F = \mathrm{Vect}(b_1,\dots,b_r).$$

La famille $(b_1,\dots,b_r)$ est une base de F. Sa juxtaposition avec la base $(a_1,\dots,a_{n-r})$ de $\mathrm{Ker}(f)$ donne une base de E (d'après la question précédente) donc F est un $\boxed{\text{supplémentaire de } \mathrm{Ker}(f) \text{ dans } E}$.