Devoir maison n° 10

Ce devoir maison est composée d'un exercice obligatoire et d'un exercice facultatif. Bon courage !

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [n, +\infty[, \quad g_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t.$

1. **Etude de g_n**
   (a) Montrer que g_n est dérivable sur son domaine de définition, et préciser g_n'.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
   (c) Dresser alors le tableau de variations complet de g_n.
   (d) Montrer que g_n est convexe sur $[n, +\infty[$.
   On rappelle que pour une fonction f deux fois dérivables, on a : f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.
   (e) Préciser l'équation de la tangente à g_n en n, puis tracer l'allure de la courbe de g_n.
   (f) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté $x_n \in [n, +\infty[$ tel que $g_n(x_n) = 1$.
2. **Etude de la suite (x_n).**
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
   (b) En revenant à la définition de (x_n), montrer que pour tout entier n :
   $$\mathrm{e}^{n^2}(x_n - n) \leqslant 1 \leqslant \mathrm{e}^{x_n^2}(x_n - n)$$
   puis que
   $$\mathrm{e}^{-x_n^2} \leqslant x_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-n^2}.$$
   (c) En déduire un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
3. **Etude d'une série**
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(x_n - n) = 0$.
   (b) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.(b) que $x_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n^2}$.
   (c) En déduire que la série de terme général $(x_n - n)$ converge.

Exercice 2 *Facultatif*

Soient un entier $n \geqslant 1$ et l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^n (x+1)^n.$$

1. On note $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux applications définies par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = (x-1)^n \quad \text{et} \quad h_2(x) = (x+1)^n.$$
   Déterminer, pour tout $k \in [0, n]$, les expressions de $h_1^{(k)}$ et $h_2^{(k)}$.

2. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k \quad (\star)$$

3. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{2k}{n} x^{2k-n}(-1)^{n-k} \quad (\star\star)$$

   (c) En utilisant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, montrer que

$$\sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{2k}{n}(-1)^{n-k} = 2^n$$

