Corrigé CB n° 2

Exercice 1 *Piste bleue*

1. Commençons par vérifier que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x] : \deg(P) \leqslant n$, alors
$$\deg\left(3xP'\right) = 1 + \deg\left(P'\right) \leqslant 1 + (n-1) = n$$
et de même,
$$\deg\left(\left(x^2-1\right)P''\right) = 2 + \deg\left(P''\right) \leqslant n,$$
donc par somme, $\deg(\Phi(P)) \leqslant n$ et $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]}$.
Montrons que Φ est une application linéaire. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + Q) &= 3x(\lambda P + Q)' + \left(x^2-1\right)(\lambda P + Q)'' \\ &= 3x\left(\lambda P' + Q'\right) + \left(x^2-1\right)\left(\lambda P'' + Q''\right) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).\end{aligned}$$
On conclut donc que Φ est bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.
2. En posant
   - $P(x) = x^0, P' = 0 = P''$ d'où $\Phi\left(x^0\right) = 0$;
   - $P(x) = x$, donc $P'(x) = 1$ et $P''(x) = 0$ d'où $\Phi\left(x^1\right)(x) = 3x \times 1 + 0 = 3x$.
   - Soit $k \geqslant 2$, si $P(x) = x^k$ alors $P'(x) = kx^{k-1}$, $P''(x) = k(k-1)x^{k-2}$ donc
   $$\Phi(x^k) = 3x \times kx^{k-1} + (x^2-1)k(k-1)x^{k-2} = 3kx^k + k(k-1)x^k - k(k-1)x^{k-2} = k(k+2)x^k - k(k-1)x^{k-2}.$$
   On remarque de $\Phi(x^k)$ est un polynôme de degré k car $k(k+2) \neq 0$.
3. Comme $\left(x^0, x^1, \ldots, x^n\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$,
$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}\left(\Phi\left(x^0\right), \Phi\left(x^1\right), \ldots, \Phi\left(x^n\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(0, 3x, \ldots, n(n+2)x^n - n(n-1)x^{n-2}\right).$$
On enlève le 0, il reste une famille de polynômes non-nuls génératrice de $\operatorname{Im}(\Phi)$. Il reste à montrer qu'elle est libre. D'après la question 2., on a : $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La famille est échelonnée en degré donc libre. donc c'est une $\boxed{\text{base de } \operatorname{Im}(\Phi)}$.
4. Posons $P : x \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\Phi(P)(x) = 3x(2ax+b) + \left(x^2-1\right)(2a) = 8ax^2 + 3bx - 2a.$$
Alors par identification des coefficients $P \in \operatorname{Ker}(\Phi) \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 0 \\ 3b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow P : x \mapsto c$. Finalement,
$$\operatorname{Ker}(\Phi) = \{P(x) = c, c \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\left(x^0\right).$$
La famille $\left(x^0\right)$ est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(\Phi)}$.

Exercice 2 *Piste bleue*

1. (a) Puisque I et J sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire de I et J reste dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (car c'est un espace vectoriel) donc f est une bien application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Montrons qu'elle est linéaire. Soient $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telles que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda c + c' \\ \lambda b + b' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= \frac{\lambda a + a' + \lambda d + d'}{2} I + \frac{\lambda b + b' + \lambda c + c'}{2} J \\ &= \lambda \left(\frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J \right) + \left(\frac{a'+d'}{2} I + \frac{b'+c'}{2} J \right) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

En conclusion, f est un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

(b) La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ étant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})).$$

Or on a $f(E_{1,1}) = \frac{1}{2} I, f(E_{1,2}) = \frac{1}{2} J, f(E_{2,1}) = \frac{1}{2} J$ et $f(E_{2,2}) = \frac{1}{2} I$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2} I, \frac{1}{2} J, \frac{1}{2} J, \frac{1}{2} I \right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2} I, \frac{1}{2} J \right) = \mathrm{Vect}(I,J).$$

La famille (I,J) est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. En conclusion, la famille (I,J) est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(f)}$.

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-d \\ c=-b \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M = dU + cV \Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}(U,V) \end{aligned}$$

où l'on a noté $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous venons donc de montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(U,V)$ et donc que (U,V) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$.

De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

La famille génératrice (U,V) étant de cardinal 2, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

(d) Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $f(M) = M$. Alors, pas définition, $M \in \mathrm{Im}(f)$ (elle admet bien un antécédent par f : elle-même).

($\Leftarrow$) Supposons que $M \in \mathrm{Im}(f)$. Par la question 1(b), on sait qu'il existe α et β deux réels tels que $M = \alpha I + \beta J$. Il vient alors, par linéarité de f,

$$f(M) = \alpha f(I) + \beta f(J) = \alpha I + \beta J = M$$

Donc $f(M) = M$.

En conclusion, on a bien montré que $\boxed{f(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathrm{Im}(f).}$

2. (a) Montrons que cette famille est une base. Comme cette famille est de cardinal 4 et que $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 I + \lambda_4 J = 0_2$$

Or,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_4 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En faisant $L_1 + L_2$, on obtient $\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$, en faisant $L_3 + L_3$, on obtient $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$. La famille est donc bien libre.
En conclusion, la famille (A, B, I, J) est une $\boxed{\text{base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

(b) f est une application linéaire donc g en est également une par composition. Ainsi, f et g sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base. Prenons la base (A, B, I, J).
On remarque d'abord que A et B sont dans $\mathrm{Ker}(f)$ car $A = -U$ et $B = -V$ (question 1(c)). Ainsi,

$$f(A) = f(f(A)) = g(A) = 0 \text{ et } f(B) = f(f(B)) = g(B) = 0 \text{ (car } g \text{ étant linéaire}, g(0) = 0).$$

Ensuite, on a déjà remarqué que I et J que $f(I) = I$ et $f(J) = J$ (question 1 (d)), donc

$$f(I) = I = f(f(I)) = g(I) \text{ et } f(J) = J = f(f(J)) = g(J).$$

Nous venons de montrer que f et g coïncident sur la base (A, B, I, J).
En conclusion, les applications linéaires f et g $\boxed{\text{sont égales}}$.

Exercice 3 *Piste bleue*

1. On a la fonction suivante :

```python
def somme(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+np.log(k)
    return S
```

2. (a) La fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi pour $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\ln(k) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(k+1),$$

On en déduit par croissance de l'intégrale (comme $k \leqslant k+1$) que :

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \ln(k+1)\mathrm{d}t$$

or

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\mathrm{d}t = \ln(k)(k+1-k) = \ln(k) \text{ et } \int_k^{k+1} \ln(k+1)\mathrm{d}t = \ln(k+1)(k+1-k) = \ln(k+1).$$

On en déduit l'inégalité voulue :

$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)$$

(b) Soit un entier $n \geqslant 2$, sommons l'inégalité précédente pour k variant de 1 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$$

or on a :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = S_{n-1}$.

- En effectuant le changement d'indice $j = k+1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{j=2}^{n} \ln(j) = S_n$ car $\ln(1) = 0$.
- D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

On obtient alors l'inégalité voulue pour un entier $n \geqslant 2$:

$$S_{n-1} \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n$$

(c) De l'inégalité précédente, on obtient directement une minoration de S_n pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n.$$

On peut également en déduire une majoration de S_n, en effet pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$S_{n-1} \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t$$

donc pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$S_n = S_{n-1} + \ln(n) \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n).$$

En résumé pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'encadrement :

$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n).$$

Il nous reste à calculer l'intégrale. Effectuons pour commencer une intégration par parties sur la première. On pose $\begin{cases} u(t) &= \ln(t) \\ v'(t) &= 1 \end{cases}$, on a alors $\begin{cases} u'(t) &= \dfrac{1}{t} \\ v'(t) &= t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t &= [\ln(t)t]_1^n - \int_1^n \frac{1}{t} \times t\mathrm{d}t \\
&= n\ln(n) - \ln(1) - \int_1^n 1\mathrm{d}t \\
&= n\ln(n) - (n-1) \\
&= n\ln(n) - n + 1.
\end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant n\ln(n) - n + 1 + \ln(n),$$

soit

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n) - n + 1.$$

3. De l'inégalité précédente, on déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{n\ln(n)} \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} = 1 \text{ et } 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{n} = 1.$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n\ln(n)} = 1$ et donc $\boxed{S_n \sim n\ln(n)}$.

On a d'une part,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) = \ln(n!),$$

et d'autre part,

$$n\ln(n) = \ln(n^n).$$

On en déduit que $\boxed{\ln(n!) \sim \ln(n^n)}$.

Problème 1 *Piste rouge*

Partie I : Étude d'un exemple

1. On vérifie facilement avec la définition que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ -6x+4y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ -2y-4z=0 \\ 2y+4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=-2z \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=z(-1,-2,1)$$

Donc $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}((-1,-2,1))$. La famille $((-1,-2,1))$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. On en déduit par le théorème du rang que $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 2 , et donc il suffit de donner une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Im}(f)$ pour obtenir une base de $\operatorname{Im}(f)$. Par exemple $f(1,0,0)=(-1,-6,3)$ et $f(0,0,1)=(1,2,1)$ ne sont pas colinéaires, et donc forment une base de $\operatorname{Im}(f)$.

3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie, on dispose de nombreuses méthodes pour montrer que $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Prouvons par exemple que la concaténation des deux bases de $\operatorname{Ker}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$ obtenues précédemment forment une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons pour cela que la famille $((-1,-2,1),(-1,-6,3),(1,2,1))$ est une famille libre. Soient donc $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1(-1,-2,1)+\lambda_2(-1,-6,-3)+\lambda_3(1,2,1)=(0,0,0)$. Il vient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1-6\lambda_2+2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ -8\lambda_2+4\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow -L_2+2L_1 \Longleftrightarrow L_3 \leftarrow L_3-L_1 = \lambda_2=\lambda_3=0$$

Donc la famille $((-1,-2,1),(-1,-6,3),(1,2,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Elle est en outre composée de 3 vecteurs et $\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=3$ donc elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : la concaténation de deux bases de $\operatorname{Im}(f)$ et de $\operatorname{Ker}(f)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}^3$.

4. On a $f^2(1,0,0)=f(-1,-6,3)=(-2,-12,6)=2f(1,0,0)$ et de même $f^2(0,0,1)=f(1,2,1)=(2,4,2)=2f(0,0,1)$. Puisque de plus $f^2(-1,-2,1)=f(0,0,0)=(0,0,0)$, on en déduit que les deux endomorphismes f^2 et $2f$ coïncident sur la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue par concaténation des deux bases de $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$.
Conclusion : $f^2=2f$.
On rappelle que deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Partie II : Étude générale des endomorphismes vérifiant $f \circ f=\lambda f$.

5. Si $f \in A_\lambda$ est un isomorphisme, alors $f \circ f=\lambda f$, ce qui après composition par f^{-1} nous donne $f=\lambda \mathrm{Id}_E$.
Réciproquement : $\lambda \mathrm{Id}_E$ est un isomorphisme qui vérifie $(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ (\lambda \mathrm{Id}_E)=\lambda^2 \mathrm{Id}_E=\lambda(\lambda \mathrm{Id}_E)$.
Conclusion : $A_\lambda=\{\lambda \mathrm{Id}_E\}$

6. (a) Si $x \in E$ vérifie $f(x)=\lambda x$, alors $x=f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im}(f)$.
Réciproquement si $y \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y=f(x)$. Alors $f(y)=f(f(x))=\lambda f(x)=\lambda y$.
Conclusion : on a montré par double inclusion que $\operatorname{Im}(f)=\{x \in E \mid f(x)=\lambda x\}$.

   (b) Soit $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x)=0_E$ car $x \in \operatorname{Ker}(f)$, mais par la question précédente, on a aussi $f(x)=\lambda x$, si bien que $\lambda x=0_E$, et donc, puisque $\lambda \neq 0, x=0_E$. Ainsi, $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)=\{0_E\}$ et donc $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont en somme directe. D'autre part d'après le théorème du rang on a $\dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Im}(f))=\dim(E)$.
Conclusion : $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

   (c) Soit $y \in \operatorname{Im}(f-\lambda \operatorname{Id}_E)$, et soit alors $x \in E$ tel que $y=f(x)-\lambda x$.
Alors $f(y)=f(f(x))-\lambda f(x)=\lambda f(x)-\lambda f(x)=0_E$, si bien que $y \in \operatorname{Ker}(f)$.
Conclusion : $\operatorname{Im}(f-\lambda_{\mathrm{Id}}) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

   (d) Notons p le projecteur sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$.
Alors pour tout $x \in \operatorname{Im}(f), f(x)=\lambda x=\lambda p(x)$. Et pour tout $x \in \operatorname{Ker}(f), f(f(x))=0_E=\lambda p(x)$. Donc $f \circ f$ et $\lambda p=\lambda \operatorname{Id}_E \circ p$ coïncident sur $\operatorname{Ker}(f)$ et sur $\operatorname{Im}(f)$, donc sur E tout entier.
Conclusion : on a bien $f=\lambda \mathrm{Id}_E \circ p$.

Partie III : Endomorphismes vérifiant $f \circ f=-\operatorname{Id}_E$.

7. (a) i. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda u + \mu f(u) = 0_E$.
Alors en appliquant f il vient $\lambda f(u) + \mu f^2(u) = 0_E$, soit encore $\lambda f(u) - \mu u = 0_E$.
Et donc $\lambda(\lambda u + \mu f(u)) - \mu(\lambda f(u) - \mu u) = 0_E$, si bien que $\left(\lambda^2 + \mu^2\right) u = 0_E$. Et puisque $u \neq 0_E$, alors $\lambda^2 + \mu^2 = 0$.
Mais puisque $\lambda^2 \geqslant 0$ et $\mu^2 \geqslant 0$, alors nécessairement $\lambda = \mu = 0$.
Conclusion : la famille $(u, f(u))$ est libre.

Remarque : on peut aussi raisonner par l'absurde en supposant que u et $f(u)$ sont colinéaires.

ii. Montrons maintenant que F_u est stable par f.
Soit donc $x \in F_u$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = \lambda u + \mu f(u)$. Alors :

$$f(x) = \lambda f(u) + \mu f^2(u) = \lambda f(u) - \mu u \in F_u$$

Conclusion : F_u est stable par f.

iii. Par définition $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ donc on a clairement $u \in F_u$.

iv. À présent soit H un sous-espace vectoriel de E, stable par f et contenant u. Alors par stabilité de H par f, $f(u) \in H$.
Et alors H est un sous-espace vectoriel contenant u et $f(u)$, il contient $\mathrm{Vect}(u, f(u))$.
Conclusion : F_u est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant u.

(b) i. Soit $a \in F_u$ un vecteur non nul.
D'après la question précédente, F_u est stable par f, et il contient a. Donc $f(a) \in F_u$, donc $F_a \subset F_u$.

ii. Montrons maintenant que $\dim(F_a) = \dim(F_u)$.
En effet, d'après la question précédente, F_u est de dimension 2 (engendré par la famille libre $(u, f(u))$) et le même raisonnement prouverait que F_a est également de dimension 2 .
Conclusion : $F_a \subset F_u$ et $\dim(F_a) = \dim(F_u)$ donc $F_u = F_a$.

(c) i. Supposons par l'absurde que $G \cap F_u \neq \{0_E\}$ et soit a un vecteur non nul de $G \cap F_u$.
Puisque G est stable par f et contient a, il contient F_a. Mais par ailleurs, $a \in F_u$, et donc par la question précédente, $F_a = F_u$. Puisque $u \in F_u$ et que $F_u = F_a \subset G$, on a donc $u \in G$, ce qui est absurde.
Conclusion : G et F_u sont en somme directe.

ii. Si $x \in G \oplus F_u$, alors il existe $x_G \in G$ et $x_u \in F_u$ tels que $x = x_G + x_u$.
Et alors $f(x) = f(x_G) + f(x_u)$. Puisque G est stable par $f, f(x_G) \in G$, et de même $f(x_u) \in F_u$. Donc $f(x) \in G \oplus F_u$, qui est donc un sous-espace vectoriel de E stable par f.

(d) Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la propriété :
$\mathcal{P}(k)$: « il existe des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tels que $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k))$ soit une famille libre et $\mathrm{Vect}((u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k)))$ soit stable par f ».

Initialisation E est de dimension $n \geqslant 1$ donc il n'est pas réduit au vecteur nul donc il existe un vecteur u non nul dans E, qui répond bien à la question d'après la question 7.(a)

Hérédité soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. On suppose la propriété vraie au rang k. Il existe donc des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ tels que $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k))$ soit une famille libre et $\mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k))$ soit stable par f.
On pose donc

$$G = \mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k)).$$

La famille $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k))$ est libre donc G est de dimension $2k < \dim(E)$, et donc n'est pas égal à E. Il existe donc $u_{k+1} \in E \backslash G$. Alors d'après la question 7.(c), G et $F_{u_{k+1}}$ sont en somme directe, et leur somme est stable par f. Comme G et $F_{u_{k+1}}$ sont en somme directe, on vérifie facilement que la famille $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k), u_{k+1}, f(u_{k+1}))$ est une famille libre. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion le principe de récurrence assure que la propriété est vraie pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$.

(e) On sait déjà que la famille $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$ est libre. Montrons qu'elle est génératrice de E.

Pour cela raisonnons par l'absurde : on suppose donc que $\mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$ ne soit pas égal à E tout entier, et soit u_{p+1} un vecteur de E qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$. Alors comme précédemment,

$$\dim(\mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p), u_{p+1}, f(u_{p+1}))) = 2(p+1)$$

donc $\mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p), u_{p+1}, f(u_{p+1}))$, est un sous-espace vectoriel de E dimension $2(p+1)$, si bien que $2p + 2 \leqslant \dim(E)$, et donc $p + 1 \leqslant \dfrac{\dim(E)}{2}$. Ceci contredit la définition de p comme étant le plus grand entier k tel que $2k \leqslant \dim(E)$. On en déduit donc que $E = \mathrm{Vect}(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$.

Conclusion : la famille $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$ est une base de E.

(f) On en déduit que $\dim(E)$ est un entier pair.

8. Soit E un espace vectoriel de dimension $2p$, et soit $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{2p})$ une base de E.
Il existe alors un unique endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1, f(e_3) = e_4, f(e_4) = -e_3 \ldots, f(e_{2p-1}) = e_{2p} \text{ et } f(e_{2p}) = -e_{2p-1}.$$

Et alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(f(e_{2i-1})) = f(e_{2i}) = -e_{2i-1}$ et $f(f(e_{2i})) = f(-e_{2i-1}) = -e_{2i}$. Donc f^2 et $-\mathrm{Id}_E$ coïncident sur une base de E, donc sont égaux.
Conclusion : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Problème 2 *Pistes bleue ET rouge, D'après ECRICOME, voie E*

Partie I

1. Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, la variable X_k suit $\boxed{\text{la loi uniforme sur } [\![1, n]\!]}$. Ainsi :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X_k = i) = \frac{1}{n}$$

Et donc l'espérance vaut :

$$E(X_k) = \frac{n+1}{2}.$$

2. (a) Si la première boule tirée est la boule numéro n, on a $T_n = 1$.
Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i}_{\geqslant 1} \geqslant n$, la variable T_n ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à n.
Enfin, toute valeur intermédiaire est possible : si $k \in [\![2, n]\!]$, alors la suite de tirages

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(k-1) \text{ premiers tirages}}, \overbrace{(n-k+1)}^{k\text{-ème tirage}} \quad \text{(par exemple)}$$

donne $T_n = k$ (puisque $S_{k-1} = k - 1 < n$ et $S_k = n$). Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

(b) La seule possibilité pour avoir $S_1 \geqslant n$ est de tirer la boule numéro n au premier tirage (et on aura alors en fait $S_1 = n$) :

$$[T_n = 1] = [X_1 = n].$$

Puisque X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$: $\boxed{P(T_n = 1) = \frac{1}{n}}$.

(c) L'événement $[T_n = n]$ est égal à :

$$\begin{aligned}
[S_{n-1} \leqslant n-1] \cap [S_n \geqslant n] &= \underbrace{[\overbrace{\overbrace{X_1}^{\geqslant 1} + \cdots + \overbrace{X_{n-1}}^{\geqslant 1}}^{\geqslant n-1} \leqslant n-1]}_{\text{donc égalité partout}} \cap [S_n \geqslant n] \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [S_n \geqslant n] \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_1 + \cdots + X_n \geqslant n] \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] \cap \underbrace{[X_n \geqslant 1]}_{\text{toujours vrai}} \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1]
\end{aligned}$$

Par indépendance de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ (les tirages sont avec remise) :

$$P(T_n = n) = \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. D'après la question 2 :

$$T_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad ; \quad P(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. D'après la question 2 :

$$T_3(\Omega) = \{1,2,3\} \quad ; \quad P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

Et par conséquent :

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Calculons l'espérance de T_3 :

$$E(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Partie II

1. Comme déjà précisé en partie A pour S_n et S_{n-1}, la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donné la boule numéro 1.
Elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n.
On a alors $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]}$.
Remarque : On n'a, en fait, montré qu'une inclusion $S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!]$ mais on peut supposer que le correcteur se contentera de cette réponse, l'égalité étant un peu difficile à prouver.

2. (a) On a immédiatement :

$$S_{k+1} = X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

(b) Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[S_k = j]\}_{j \in [\![k, nk]\!]}$ donne :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} P\big([S_{k+1} = i] \cap [S_k = j]\big) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P\big([S_k + X_{k+1} = i] \cap [S_k = j]\big) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P\big([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]\big) \end{aligned}$$

L'événement $[X_{k+1} = i - j]$ étant impossible si $i - j \notin [\![1, n]\!]$, on peut ne conserver dans cette somme que les termes tels que $1 \leqslant i - j \leqslant n$, c'est-à-dire (la deuxième des inégalités précédentes étant réalisée car $i \leqslant n$) tels que $j \leqslant i - 1$, les autres termes étant nuls. Puisque $i - 1 \leqslant nk$ (car $i \leqslant n$ et $k \geqslant 1$), on a :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P\big([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]\big)$$

Enfin, les variables $X_1, \ldots, Xk, X_{k+1}$ étant indépendantes, le lemme des coalitions (RDV en deuxième année) donne l'indépendance des deux variables $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et X_{k+1} et cela démontre l'égalité admise dans le sujet : $P([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]) = P(X_{k+1} = i - j)P(S_k = j)$.
D'où avec la question 1. (X_{k+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$) :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{P(X_{k+1} = i - j)}_{= \frac{1}{n}} \times P(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

3. (a) La formule du triangle de Pascal s'écrit, pour $k, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouvons par récurrence sur i que :

$$\forall i \geqslant k+1, \quad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

On pose pour $i \geqslant k+1$, $\mathcal{H}(i)$: «$\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ ».

Initialisation pour $i = k+1$, la somme ne comporte qu'un seul terme : $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$ et $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.

Hérédité Supposons, pour un entier $i \geqslant k+1$ fixé que $\mathcal{H}(i)$ est vraie et montrons que $\mathcal{H}(i+1)$ est vraie :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\
&= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{i}{k} \quad \text{d'après le triangle de Pascal} \\
&= \binom{(i+1)-1}{k}
\end{aligned}$$

La formule est ainsi prouvée pour $i+1$ et $\mathcal{H}(i+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $i \geqslant k+1$.

(c) **Initialisation** $(k=1)$ On a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{1}{n}\underbrace{\binom{i-1}{0}}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

Comme $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ d'après la question 1., on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(S_1 = i) = \dfrac{1}{n}$ et donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Hérédité Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons $\mathcal{H}_k$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. D'après la question 2.(b) de la partie B et par hypothèse de récurrence :

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}$$

Et donc, d'après la question 3.(b) de la Partie B :

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

On a ainsi prouvé $\mathcal{H}_{k+1}$.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

4. (a) L'événement $[T_n > k]$ signifie que la somme des numéros des boules obtenues est pour la première fois supérieure ou égale à n lors du tirage numéro ℓ avec $\ell > k$, autrement dit que lors du tirage numéro k, la somme des numéros des boules obtenues est *strictement* inférieure (négation de « supérieure ou égale ») à n, c'est-à-dire $[S_k < n] = [S_k \leqslant n-1]$:

$$[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1].$$

(b) En écrivant, avec une union d'événements incompatibles :

$$[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1] = \bigcup_{i=1}^{n-1} [S_k = i]$$

on obtient, avec 3.(c) puis 3.(b) de la Partie B :

$$P(T_n > k) = \sum_{i=1}^{n-1} P(S_k = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

5. (a) $[T_n \leqslant k] = [T_n = k] \cup [T_n \leqslant k-1]$ donc

$$P(T_n \leqslant k) = P(T_n = k) + P(T_n \leqslant k-1)$$

d'où

$$1 - P(T_n > k) = P(T_n = k) + 1 - P(T_n > k-1).$$

On en déduit que $\boxed{P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)}$.

(b) La variable aléatoire T_n ($T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$) étant finie, elle admet en effet une espérance et :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n = k).$$

En écrivant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \; P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k-1)}_{\substack{=0 \\ \text{pour } k=1}} \; P(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^{n} P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1) \; P(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^{n} P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k)
\end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = k-1$ dans les deux premières sommes :

$$E(T_n) = \cancel{\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \; P(T_n > \ell)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k)} = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell).$$

(c) Avec la question 4.(b), on a donc :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \times 1^{(n-1)-k} = \left(\frac{1}{n}+1\right)^{n-1}}_{\text{par la formule du binôme de Newton}}$$

6. On va déterminer la limite de $E(T_n)$ en écrivant l'expression trouvée ci-dessus sous « forme exponentielle » :

$$E(T_n) = \exp\left((n-1)\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)$$

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1) \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$E(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1) = \mathrm{e}.$$

7. Python

```python
def T(n):
    S=0
    y=0
    while S<n :
        tirage=rd.randint(1,n+1)
        S=S+tirage
        y=y+1
    return y
```

Problème 3 *Piste rouge, EML 2021, voie E*

Partie I : Etude de la fonction φ

1. La fonction φ est continue sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]-\infty, 1[$. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est bien continue sur $]-\infty, 1[$ car $1-x>0$ sur cet intervalle.
Il reste donc à étudier la continuité de φ en 1. Pour cela, calculons les limites à gauche et à droite en 1. On a :
$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \varphi(1) = 1$$
et
$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} x + (1-x)\ln(1-x)$$
or $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{u\to 0^+} u\ln(u) = 0$ par croissance comparée. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = 1 = \varphi(1)$. La fonction φ est donc bien continue en 1.On peut donc conclure que $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]-\infty, 1]}$.

2. (a) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
Soit $x \in]-\infty, 1[$.
$$\varphi'(x) = 1 + (-1) \times \ln(1-x) + (1-x) \times \left(-\frac{1}{1-x}\right) = \cancel{1} - \ln(1-x) - \cancel{1}$$
Finalement, $\boxed{\text{pour } x \in]-\infty, 1[, \quad \varphi'(x) = -\ln(1-x)}$.

   (b) Soit $x \in]-\infty, 1[$.
$$\begin{aligned} \varphi'(x) > 0 &\Leftrightarrow -\ln(1-x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(1-x) < 0 \\ &\Leftrightarrow 1-x < \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow 0 < x \end{aligned}$$
On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Détaillons le calcul de $\varphi(0)$:
$$\varphi(0) = 0 + (1-0)\ \ln(1-0) = \ln(1) = 0$$

   (c) Pour étudier la dérivabilité de φ, étudions la limite quand x tend vers 1 de son taux d'accroissement en 1.
Soit $x \in]-\infty, 1[$.
$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} &= \frac{x + (1-x)\ \ln(1-x) - 1}{x-1} \\ &= \frac{x - 1 - (x-1)\ \ln(1-x)}{x-1} \\ &= \frac{\cancel{(x-1)}\,\big(1-\ln(1-x)\big)}{\cancel{x-1}} \\ &= 1 - \ln(1-x) \end{aligned}$$
Or, avec le changement de variable $u = 1-x$:
$$\lim_{x\to 1} 1 - \ln(1-x) = \lim_{u\to 0} 1 - \ln(u) = +\infty$$
Le taux d'accroissement de φ en 1 n'admet donc pas de limite finie en 1. $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.

3. Il s'agit a priori d'une forme indéterminée. On a :

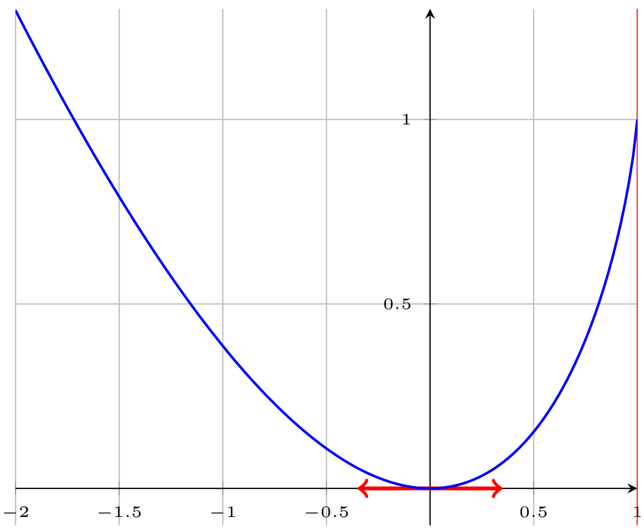
$$\varphi(x) = x + \ln(1-x) - x\ln(1-x).$$

Factorisons par le terme prépondérant, à savoir $x\ln(1-x)$, on obtient :

$$\varphi(x) = x\ln(1-x)\left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} - 1\right)$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln(1-x)} = 0$ par composée de limites et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} - 1\right) = -1$. De plus, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(1-x) = -\infty$. On conclut par produit de limites que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty}$.

4. D'après la question 2.(c) : $\lim\limits_{x\to1} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x=1$ est tangente à la courbe représentative de φ en 1. On obtient la courbe suivante :



5. (a) Soit $A \in\,]0,1]$.
On procède par intégration par parties.

$$\left|\begin{array}{lllll} u(t) & = & \ln(t) & u'(t) & = \frac{1}{t} \\ v'(t) & = & t & v(t) & = \frac{1}{2}\,t^2 \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A,1]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\,t^2\,\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t}\times\frac{1}{2}\,t^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\cancel{1^2\,\ln(1)} - A^2\,\ln(A)\right) - \frac{1}{2}\int_A^1 t\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\,A^2\,\ln(A) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,t^2\right]_A^1 \\ &= -\frac{1}{2}\,A^2\,\ln(A) - \frac{1}{4}\,(1-A^2) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\int_A^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,A^2\,\ln(A) - \frac{1}{4}\,(1-A^2)}$. D'une part, par croissances comparées : $\lim\limits_{A\to0} A^2\,\ln(A) = 0$ et d'autre part : $\lim\limits_{A\to0} A^2 = 0$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\boxed{\int_0^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}}$.

(b) • D'après la question 1., la fonction φ est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ est donc bien définie.

• On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 t + (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Notons qu'on peut bien appliquer la linéarité de l'intégrale car les intégrales $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 t\mathrm{d}t$ sont convergentes, et donc l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t$ est bien convergente.

• Tout d'abord :

$$\int_0^1 t\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

• Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t$ (dont on sait qu'elle est convergente), on effectue le changement de variable $u = 1-t$. On a alors :

⋆ $t = 1-u$
⋆ $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$
⋆ Quand $t = 0$, $u = 1$
⋆ Quand $t = 1$, $u = 0$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t = \int_1^0 u\ \ln(u)\ (-\ du) = \int_0^1 u\ \ln(u)\ du = -\frac{1}{4}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la question précédente.

On en déduit : $\boxed{\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.}$

Partie II : Etude de deux séries

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,x]$. Comme $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}.$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,x],\ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x. On obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

Étudions le membre de gauche. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^x t^k \mathrm{d}t\right) \\
&= [-\ln(1-t)]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{k+1}\ t^{k+1}\right]_0^x \\
&= -\ln(1-x) + \cancel{\ln(1-0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1} - 0^{k+1}\right) \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} \qquad \textit{(en effectuant le changement d'indice j=k+1)}
\end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t}$.

2. Soit $t \in [0, x]$, on a :

$$0 \leqslant t \leqslant x \quad \text{donc} \quad 0 \geqslant -t \geqslant -x \quad \text{d'où} \quad 1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x.$$

Alors par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$. On a :

$$1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi comme $t^n \geqslant 0$, on a :

$$t^n \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.$$

On a donc $\forall t \in [0, x]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$.

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{n+1}\ t^{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\ \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On obtient :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

De plus comme, $x < 1$, on a, par croissance de $t \mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, $x^{n+1} \leqslant 1$. Comme $(n+1)(1-x) > 0$, on obtient :

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$

On peut donc conclure que $\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}}$.

On remarque alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$ donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

3. D'après la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} \;=\; -\ln(1-x)+0$$

Par ailleurs, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$.

4. (a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rlcl}
 & \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} & = & \dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}\\
\Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} & = & \dfrac{a\,(n+1)+b\,n}{n\,(n+1)}\\
\Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1 & = & a\,(n+1)+b\,n\\
\Longleftrightarrow & \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1 & = & a+(a+b)\,n\\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1\\ a & + & b & = & 0\end{array}\right. & & \textit{(par identification)}\\
L_2\leftarrow L_2-L_1 & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1\\ & & b & = & -1\end{array}\right. & &
\end{array}$$

Finalement, en choisissant $a=1$ et $b=-1$, on a : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}$.

(b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N}x^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) & \textit{(d'après 4.(a))}\\
 & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n+1}}{n+1} & \\
 & = & \displaystyle x\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n}}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n+1}}{n+1} & \\
 & = & \displaystyle x\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n}}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{x^{n}}{n} & \textit{(par décalage d'indice)}\\
 & = & \displaystyle x\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n}}{n}-\left(\sum_{n=1}^{N+1}\frac{x^{n}}{n}-\frac{x^1}{1}\right) & \\
 & = & \displaystyle x+x\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{n}}{n}-\sum_{n=1}^{N+1}\frac{x^{n}}{n} &
\end{array}$$

Or d'après la question 3., la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ est convergente, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ converge.}}$

De plus, toujours d'après la question 3. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \;=\; x+x\times\big(-\ln(1-x)\big)-\big(-\ln(1-x)\big)$$

On obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x) = \varphi(x).}$

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) && \textit{(d'après 4.(a))}\\ &= 1 - \frac{1}{N+1} && \textit{(par télescopage)}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1 = \varphi(1)$.