Corrigé du CB n° 2

Exercice 1 *ESCP 2015, voie T*

1. (a) Calculons : $1 \times b - 1 \times a = -1 - (-1) = 0$, la matrice M n'est donc $\boxed{\text{pas inversible}}$.

   (b) Calculons M^2, on a : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a : $M^n = M^{n-2} \times M^2 = M^{n-2} \times 0_2 = 0_2$.

2. (a) Calculons : $1 \times b - 1 \times a = b - a = 0$, la matrice M n'est donc $\boxed{\text{pas inversible}}$.

   (b) Montrons le résultat par récurrence, posons pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(n)$: « $M^n = (1+a)^{n-1} M$ ».

   Initialisation $(n = 2)$ $M^2 = \begin{pmatrix} 1+a & a^2+a \\ 1+a & a^2+a \end{pmatrix} = (1+a)M$. La propriété est donc initialisée.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= (1+a)^{n-1} M \times M \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (1+a)^{n-1} M^2 \\ &= (1+a)^{n-1}(1+a)M \quad \text{d'après } \mathcal{P}(2) \\ &= (1+a)M \end{aligned}$$

   La propriété est donc héréditaire.

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $M^n = (1+a)^{n-1} M$.

3. Une matrice de taille 2 est inversible si et seulement si $1 \times b - 1 \times a \neq 0$ ssi $b - a \neq 0$ ssi $a \neq b$.

4. (a) i. X et Y suivent des lois géométriques, leur support est donc $\mathbb{N}^*$. Montrons l'égalité par double inclusion.

   $(\subset)$ Soit $\omega \in [X = Y]$ alors $X(\omega) = Y(\omega)$, posons $k = X(\omega) \in \mathbb{N}^*$ alors $\omega \in [X = k]$ et $\omega \in [Y = k]$ et donc $\omega \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = k]$.

   $(\supset)$ Soit $\omega \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = k]$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in [X = k] \cap [Y = k]$ alors $X(\omega) = k = Y(\omega)$ soit $\omega \in [X = Y]$.

   ii. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = k]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k]) \quad \text{par incompatibilité des événements} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k]) \quad \text{par indépendance des variables aléatoires} \end{aligned}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=1}^{n} (q^2)^k$$

   On reconnaît la somme partielle de la série géométrique de raison $q^2 \in]-1, 1[$, elle converge donc et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{q^2} \times q^2 \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{1-q}{1+q}.$$

(c) D'après la question 3., la matrice N est inversible ssi $X \neq Y$. On a alors $P(A) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$. Or d'après la question 4.(a), on a :

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k).$$

Comme X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p, on peut écrire que (en utilisant la 4.(b)) :

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \times q^{k-1} \times p = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{1-q}{1+q}.$$

En conclusion, $P(A) = 1 - \dfrac{1-q}{1+q} = \dfrac{1+q-1+q}{1+q} = \boxed{\dfrac{2q}{1+q}}$.

5. (a) A l'aide de la formule du binôme, on peut écrire que :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

et

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

(b) D'une part, d'après ce qui précède et en utilisant la relation de Chasles, on a :

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} x^k + \binom{2n}{n} x^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j} \\
&= \sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n, k+j=n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j} + \sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n, k+j \neq n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j+k=n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^n + \sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n, k+j \neq n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\right) x^n + \sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n, k+j \neq n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j}
\end{aligned}$$

Comme $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, en identifiant les termes de degré n, on obtient :

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(c) En raisonnant de la même manière qu'à la question 4.(a) et en remarquant qu'ici $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n} [X = k] \cap [Y = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P([X = k] \cap [Y = k]) \quad \text{par incompatibilité des événements} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P([X = k]) \times P([Y = k]) \quad \text{par indépendance des variables aléatoires} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2}^{k} \times \frac{1}{2}^{n-k} \times \binom{n}{k} \frac{1}{2}^{k} \times \frac{1}{2}^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \quad \text{car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \quad \text{d'après la question } 5.(b) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

(d) D'après la question 3., la matrice N est inversible ssi $X \neq Y$. On a alors

$$P(A) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n}.$$

(e) On peut proposer la fonction suivante :

```
def inversible(n):
    X=rd.binomial(n,0.5)
    Y=rd.binomial(n,0.5)
    d= Y-X
    if d==0:
        return "matrice non inversible"
    else :
        invN=(1/d)*np.array([[Y,-X],[-1,1]])
        return invN
```

Exercice 2

1. La matrice A vaut : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. On calcule alors $3A - 2I_3$ et on obtient l'égalité voulue.

3. Par définition $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 3 \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - 2 \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E)$$

soit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(3f - 2Id_E).$$

Les endomorphismes f^2 et $3f - 2Id_E$ ont donc la même matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$, il sont donc égaux. Ainsi $\boxed{f^2 = 3f - 2Id_E}$.

4. En utilisant la propriété précédente et la linéarité de f, on peut écrire que :

$$f^2 = 3f - 2Id_E \iff f^2 - 3f = -2Id_E \iff f \circ (f - 3Id_E) = -2Id_E \iff f \circ \left(\frac{3}{2}Id_E - \frac{1}{2}f\right) = Id_E.$$

On en déduit que f est un isomorphisme et que $\boxed{f^{-1} = \frac{3}{2}Id_E - \frac{1}{2}f}$.

5. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$ alors $(f - 2Id_E)(X) = 0$ soit $f(X) = 2X$. On obtient alors le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} 2x - y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases}$$

Résolvons ce système, en faisant $L_2 \leftrightarrow L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

On a alors

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

On a alors $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$ alors $(f - 2Id_E)(X) = 0$ soit $f(X) = X$. On obtient alors le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} 2x - y + z = x \\ x + z = y \\ x - y + 2z = z \end{cases} \iff \left\{ x - y + z = 0 \right.$$

On a alors $\mathrm{Ker}(f - Id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + z = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

6. D'après la question précédente, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$, de plus elle est libre car formée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f-2Id_E)$. On en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}(f-2Id_E)) = 1$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$, de plus elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$. On en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}(f - Id_E)) = 2$.
On a alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2Id_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - Id_E)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.
De plus soit $X \in \mathrm{Ker}(f-2Id_E) \cap \mathrm{Ker}(f-Id_E)$, on a alors $f(X) = 2X$ et $f(X) = X$. Soit $X = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f-2Id_E) \cap \mathrm{Ker}(f - Id_E) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on en déduit que $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \cap \mathrm{Ker}(f - Id_E) = \{0\}$.
En conclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id_E) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

7. (a) On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse On cherche des endomorphismes p et q vérifiant

$$\begin{cases} p + q = Id_E \\ 2p + q = f \end{cases}$$

Résolvons ce système, on commence par faire $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, on a alors :

$$\begin{cases} p + q = Id_E \\ -q = f - 2Id_E \end{cases} \iff \begin{cases} p = f - Id_E \\ q = 2Id_E - f \end{cases}$$

Synthèse On pose $p = f - Id_E$ et $q = 2Id_E - f$. On vérifie facilement que p et q sont bien des endomorphismes car f et Id_E le sont.
On vérifie également qu'on a $p + q = Id_E$ et $2p + q = f$.

(b) Calculons $p \circ p$, on a, en utilisant la question 3. :

$$p \circ p = (f - Id_E) \circ (f - Id_E) = f^2 - 2f + Id_E = 3f - 2Id_E - 2f + Id_E = f - IdE = p.$$

Ainsi p est bien un projecteur.
Calculons $q \circ q$, on a, en utilisant la question 3. :

$$q \circ q = (-f + 2Id_E) \circ (-f + 2Id_E) = f^2 - 4f + 4Id_E = 3f - 2Id_E - 4f + 4Id_E = -f + 2IdE = q.$$

Ainsi q est bien un projecteur.

(c) On sait que $p = Id_E - q$ et $q^2 = q$, on a alors :

$$p \circ q = (Id_E - q) \circ q = q - q^2 = q - q = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$$q \circ p = q \circ (Id_E - q) = q - q^2 = q - q = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

(d) Montrons la relation par récurrence, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $f^n = 2^n p + q$ ».

Initialisation $(n = 0)$ $f^0 = Id_E$ par convention et $2^0 p + q = p + q = Id_E$ par définition de p et q. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
f^{n+1} &= f^n \circ f \\
&= (2^n p + q) \circ (2p + q) \quad \text{par hypothèse de récurrence et par définition de } f \text{ et } q \\
&= 2^{n+1} p^2 + 2^n p \circ q + q \circ 2p + q^2 \\
&= 2^{n+1} p + 2^n p \circ q + 2q \circ p + q \quad \text{par linéarité de } q \text{ et car } q \text{ et } p \text{ sont des projecteurs} \\
&= 2^{n+1} p + q \quad \text{car } p \circ q = q \circ p = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *EDHEC 2007 voie S*

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$ est continue sur $[0; +\infty[$. En effet, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x + \dfrac{1}{n}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{n} \neq 0$.
L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, pour $x \geqslant 1$, on a
$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$
et l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \mathrm{d}x$ converge. Et par conséquent, par comparaison de fonctions positives $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \mathrm{d}x$ converge. Ainsi, (u_n) est $\boxed{\text{bien définie}}$.

2. (a) Soit $x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$, donc par croissance de l'intégrale,
$$0 \leqslant w_n \leqslant \int_1^\infty \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$
Mais pour $A > 1$, on a
$$\int_1^A \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^A = \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-A} \underset{A \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}$$
de sorte que $\displaystyle\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a donc bien $\boxed{0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.}$

(b) Pour $x \in [0,1]$, on a $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+\frac{1}{n}}$, et donc par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} v_n &\geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}}dx \\ &= \left[\frac{1}{e}\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{e}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{e}(\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n)) = \frac{1}{e}\ln(n+1). \end{aligned}$$

(c) Remarquons que par la relation de Chasles, $u_n = v_n + w_n$, et donc

$$u_n \geqslant \frac{1}{e}\ln(n+1)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = \infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty}$.

3. (a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,1]$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1]$. L'intégrale est donc impropre en 0.

De plus, au voisinage de 0, $1-\mathrm{e}^{-x} \sim -(-x)$, de sorte que $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \sim 1$.

La fonction est donc prolongeable en 0 en posant $f(0)=1$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ est faussement impropre, donc $\boxed{\text{convergente}}$.

(b) Pour $x \in]0,1]$, on a $1-\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et donc

$$0 \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = I$$

(c) On a d'après ce qui précède :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \leqslant I \iff \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x - I \leqslant v_n.$$

Mais nous savons déjà que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x = \ln(n+1)$. On en déduit que $\ln(n+1) - I \leqslant v_n$.

De plus, pour $x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$. Ainsi pour $x \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$. Ainsi par croissance de l'intégrale :

$$v_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad v_n \leqslant \ln(n+1).$$

Pour conclure, on a obtenu l'encadrement suivant : $\boxed{\ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1).}$

(d) A l'aide de la relation de Chasles et les questions précédentes, on obtient que :

$$\ln(n+1) - I \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

En divisant tous les membres de cette inégalité par $\ln(n+1) > 0$, il vient :

$$1 - \frac{I}{\ln(n+1)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leqslant 1 + \frac{1}{\mathrm{e}\ln(n+1)}.$$

Par le théorème d'encadrement, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$ soit $\boxed{u_n \sim \ln(n+1)}$.

Remarque : On pourrait montrer (en passant par le quotient) que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. (Fait en cours). Ainsi $u_n \sim \ln(n)$.

Problème 1 *ECRICOME 2006 voie S*

Partie I. Etude des longueurs des séries

1. (a) Si la première série est de longueur n, alors les n premiers lancers ont donné le même résultat, et le $(n+1)^{\text{eme}}$ a donné un résultat différent. Donc

$$[L_1 = n] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})$$

(b) Les deux événements qui composent $[L_1 = n]$ sont incompatibles, de sorte que

$$P(L_1 = n) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})$$

Par indépendance des lancers, il vient alors

$$P(L_1 = n) = \prod_{i=1}^{n} P(P_i) \times P(F_{n+1}) + \prod_{i=1}^{n} P(F_i) \times P(P_{n+1}) = p^n q + q^n p.$$

(c) Notons que les séries de terme général $p^n q$ et $q^n p$ sont convergentes car géométriques de raison dans $]0,1[$. Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p \\
&= q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\
&= q \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i+1} + p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+1} \\
&= qp \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + pq \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= qp \frac{1}{1-p} + pq \frac{1}{1-q} = p + q = 1.
\end{aligned}$$

Remarque *: Ne pas oublier de préciser que la série s'arrête, c'est-à dire que le $(n+1)^{\text{tme}}$ lancer donne un résultat différent des précédents. En effet, si l'on oublie ceci. on considère alors l'événement $[L_1 \geqslant n]$ et non $[L_1 = n]$*
Le fait que cette somme soit égale à 1 signifie que la probabilité que la première série soit infinie (i.e. la probabilité d'avoir une infinité de lancers identiques) est nulle.

2. (a) On a $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ si et seulement si les n premiers lancers donnent le même résultat, que les k suivants donnent l'autre résultat, et que le $(n+k+1)^{\text{eme}}$ lancer fournit de nouveau le même résultat que les n premiers. Soit

$$[L_1 = n] \cap [L_2 = k] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}).$$

Ces deux événements sont clairement incompatibles, et par indépendance des lancers, il vient alors

$$\begin{aligned}
P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) &= \prod_{i=1}^{n} P(P_i) \times \prod_{j=n+1}^{n+k} P(F_j) \times P(P_{n+k+1}) + \prod_{i=1}^{n} P(F_i) \times \prod_{j=n+1}^{n+k} P(P_j) \times P(F_{n+k+1}) \\
&= p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k}$.

(b) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[L_1 = n], n \in \mathbb{N}^*\}$, il vient

$$\begin{aligned}
P(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k\right) = q^k p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + p^k q^2 \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= q^k p^2 \frac{1}{1-p} + p^k q^2 \frac{1}{1-q} = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}}$.

(c) Pour montrer l'existence de $E(L_2)$, étudions l'absolue convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(L_2=k)$. La série est à termes positifs donc l'absolue convergence équivaut à la convergence.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, par linéarité de la somme on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(p^2q^{k-1}+q^2p^{k-1}) = p^2\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} + q^2\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}.$$

Or les séries de terme général kq^{k-1} et kp^{k-1} sont des séries géométriques dérivées premières de raisons respectives q et p, dans $]0,1[$, et donc convergentes. On a alors

$$E(L_2) = q^2\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + p^2\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = q^2\frac{1}{(1-p)^2} + p^2\frac{1}{(1-q)^2} = 1+1=2$$

En conclusion, $\boxed{E(L_2)=2}$.

Partie II. Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

3. • En un seul lancer, il y a forcément une seule série et donc $N_1=1$. N_1 suit la loi certaine et on a $\boxed{E(N_1)=1}$.

   • En deux lancers, il y a soit une seule soit deux séries, donc $N_2(\Omega)=\{1,2\}$. De plus, $[N_2=2]=(P_1\cap F_2)\cup(F_1\cap P_2)$. Et par incompatibilité de ces deux événements, il vient

$$P(N_2=2)=P(P_1\cap F_2)+P(F_1\cap P_2)$$

   Par indépendance des lancers, on en déduit que

$$P(N_2=2)=P(P_1)P(F_2)+P(F_1)P(P_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

   Et donc $P(N_2=1)=1-P(N_2=2)=\frac{1}{2}$. On en déduit que $E(N_2)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Ainsi $\boxed{E(N_2)=\frac{3}{2}}$.
   On a donc montré que N_2 suit la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.

   • Enfin, en trois lancers, on peut avoir une, deux ou trois séries, donc $N_3(\Omega)=\{1,2,3\}$. On a

$$P(N_3=1)=P((F_1\cap F_2\cap F_3)\cup(P_1\cap P_2\cap P_3))=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}=\frac{1}{4}.$$

   De même,

$$\begin{aligned}P(N_3=3)&=P((P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3))\\&=P(P_1\cap F_2\cap P_3)+P(F_1\cap P_2\cap F_3)\quad\text{par incompatibilité des événements}\\&=P(P_1)\times P(F_2)\times P(P_3)+P(F_1)\times P(P_2)\times P(F_3)\quad\text{par indépendance des lancers}\\&=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}^3=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

   Et donc $P(N_3=2)=1-P(N_3=1)-P(N_3=3)=\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$E(N_3)=\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2.$$

   En conclusion, $\boxed{E(N_3)=2}$.

4. En n lancers, on peut avoir au minimum une série et au maximum n séries. Donc $N_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$.
Une série correspond à ne faire que Pile ou que Face donc on a :

$$[N_n=1]=\left(\bigcap_{i=1}^{n}P_i\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right).$$

Et donc, par incompatibilité de ces deux événements, et par indépendance des lancers,

$$P(N_n=1)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}P_i\right)+P\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(P_i)+\prod_{i=1}^{n}P(F_i)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Avoir n séries correspond à faire alternativement Pile ou Face. On a donc si n est pair :

$$[N_n = n] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)$$

et donc $P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Si n est impair, on a :

$$[N_n = n] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \cdots P_{n-1} \cap F_n)$$

et donc $P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

En conclusion, $\boxed{P(N=1) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ et } P(N=n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

5. **Simulation informatique** L'idée du programme qui suit est de simuler les lancers successifs, et d'utiliser le fait que le $k^{\text{ème}}$ lancer a débuté une nouvelle série si son résultat diffère du résultat du lancer précédent.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulation(m):
    X=np.zeros(m)
    N=np.zeros(m)
    X[0]=np.floor(2*.rd.random())
    N[0]=1
    for i in range(1,m):
        X[i]=np.floor(2*.rd.random())
        if X[i]==X[i-1] then :
            N[i]=N[i-1]
        else :
            N[i]=N[i-1]+1
    return N
```

Remarque : Notons que `2*rd.random()` permet de tirer un nombre au hasard dans $[0,2]$, et donc que `np.floor(2*rd.random())` retourne 0 ou 1 avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ pour chacun.

Attention : il y avait une erreur dans le sujet, il s'agissait de trouver une valeur approchée de $E(N_{20})$ en simulant 10000 fois N_{20}. On est donc en train de chercher une valeur approchée du nombre moyen de séries sur 20 lancers.

On peut alors faire appel 10000 fois à cette fonction pour simuler 10000 réalisations de N_{20} et calculer la moyenne de ces 10000 simulations, qui doit être une valeur approchée de $E(N_{20})$

```
s=0
for i in range(1,10000):
    N=simulation(20)
    s=s+N[19]
print(s/10000)
```

En testant ce programme Python, on obtient en moyenne 10,5 séries sur 20 lancers.

6. **Fonction génératrice de N_n**

(a) D'après le théorème de transfert, on a :

$$E\left(s^{N_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} s^k P(N_n = k) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k = G_n(s).$$

En conclusion, $\boxed{E(s^{N_n}) = G_n(s)}$.

(b) En dérivant la fonction $s \mapsto G_n(s)$, qui est bien dérivable car polynomiale, on a

$$\forall s \in [0,1], \quad G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)\, s^{k-1}$$

de sorte que $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = E(N_n)$. En conclusion, $\boxed{G_n'(1) = E(N_n)}$.

(c) Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$:

$$P((N_n = k) \cap P_n) = P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) + P((N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}).$$

Mais si P_n et P_{n-1} sont réalisés, alors $N_n = N_{n-1}$: une nouvelle série n'a pas été commencée au n-ème lancer. Et donc $[N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n$. De plus, l'événement $[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}$, qui ne dépend que des résultats des $n-1$ premiers lancers, est indépendant de l'événement P_n. Et donc

$$P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) P(P_n) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1})$$

De même, si F_{n-1} et P_n sont réalisés, alors une nouvelle série a été démarrée lors du $n^{\text{ìme}}$ lancer, de sorte que $[N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1} \cap P_n$. Et alors, par le même argument d'indépendance que précédemment, il vient

$$P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) P(P_n) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).$$

Il vient donc la première égalité demandée :

$$\boxed{P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).}$$

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{P_n, F_n\}$, on a

$$\begin{aligned}
&P(N_n = k) = P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) \\
&= \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2} \left(P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})\right) + \frac{1}{2} \left(P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \\
&= \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1)
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que :

$$\boxed{P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1)}.$$

(d) Soit $s \in [0, 1]$. Alors, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(P(N_{n-1} = k-1) + P(N_n = k)\right) s^k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1) s^k \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} P(N_{n-1} = j) s^{j+1} \quad \text{en posant } j = k-1 \text{ dans la 2ème somme} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^k + \frac{s}{2} \sum_{j=1}^{n-1} P(N_{n-1} = j) s^j \quad \text{car } P(N_{n-1} = 0) = 0 \text{ et } P(N_{n-1} = n) = 0 \\
&= \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{s}{2} G_{n-1}(s) \\
&= \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)}$.

On a $G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1 = 1) s = P(N_1 = 1) s = s$ donc $\boxed{G_1(s) = s}$.

Ainsi, pour s fixé, $(G_n(s))_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ et de premier terme $G_1(s) = s$, de sorte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} \times G_1(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} \times s}.$$

(e) D'après la question 6.(b), on a $E\left(N_n\right) = G_n'(1)$. Or, si l'on dérive l'expression obtenue à la question précédente, on obtient

$$G_n'(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$$

Et donc $E\left(N_n\right) = G_n'(1) = \dfrac{n-1}{2} + 1 = \dfrac{n+1}{2}$ soit $\boxed{E(N_n) = \dfrac{n+1}{2}}$.