Corrigé CB n° 2

Exercice 1

1. Commençons par vérifier que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x] : \deg(P) \leqslant n$, alors

$$\deg\left(3xP'\right) = 1 + \deg\left(P'\right) \leqslant 1 + (n-1) = n$$

et de même,

$$\deg\left(\left(x^2-1\right)P''\right) = 2 + \deg\left(P''\right) \leqslant n,$$

donc par somme, $\deg(\Phi(P)) \leqslant n$ et $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]}$.
Montrons que Φ est une application linéaire. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + Q) &= 3x(\lambda P+Q)' + \left(x^2-1\right)(\lambda P+Q)'' \\ &= 3x\left(\lambda P' + Q'\right) + \left(x^2-1\right)\left(\lambda P'' + Q''\right) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).\end{aligned}$$

On conclut donc que Φ est bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

2. En posant
   - $P(x) = x^0, P' = 0 = P''$ d'où $\Phi\left(x^0\right) = 0$;
   - $P(x) = x$, donc $P'(x) = 1$ et $P''(x) = 0$ d'où $\Phi\left(x^1\right)(x) = 3x \times 1 + 0 = 3x$.
   - Soit $k \geqslant 2$, si $P(x) = x^k$ alors $P'(x) = kx^{k-1}$, $P''(x) = k(k-1)x^{k-2}$ donc

$$\Phi(x^k) = 3x \times kx^{k-1} + (x^2-1)k(k-1)x^{k-2} = 3kx^k + k(k-1)x^k - k(k-1)x^{k-2} = k(k+2)x^k - k(k-1)x^{k-2}.$$

   On remarque de $\Phi(x^k)$ est un polynôme de degré k car $k(k+2) \neq 0$.

3. Comme $\left(x^0, x^1, \ldots, x^n\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$,

$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}\left(\Phi\left(x^0\right), \Phi\left(x^1\right), \ldots, \Phi\left(x^n\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(0, 3x, \ldots, n(n+2)x^n - n(n-1)x^{n-2}\right).$$

On enlève le 0, il reste une famille de polynômes non-nuls génératrice de $\operatorname{Im}(\Phi)$. Il reste à montrer qu'elle est libre. D'après la question 2., on a : $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La famille est échelonnée en degré donc libre. donc c'est une $\boxed{\text{base de } \operatorname{Im}(\Phi)}$.

4. Posons $P : x \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(P)(x) = 3x(2ax+b) + \left(x^2-1\right)(2a) = 8ax^2 + 3bx - 2a.$$

Alors par identification des coefficients $P \in \operatorname{Ker}(\Phi) \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 0 \\ 3b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow P : x \mapsto c$. Finalement,

$$\operatorname{Ker}(\Phi) = \{P(x) = c, c \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\left(x^0\right).$$

La famille $\left(x^0\right)$ est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(\Phi)}$.

Exercice 2

1. On a la fonction suivante :

```python
def somme(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+np.log(k)
    return S
```

2. (a) La fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi pour $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\ln(k) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(k+1),$$

On en déduit par croissance de l'intégrale (comme $k \leqslant k+1$) que :

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \ln(k+1)\mathrm{d}t$$

or

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\mathrm{d}t = \ln(k)(k+1-k) = \ln(k) \text{ et } \int_k^{k+1} \ln(k+1)\mathrm{d}t = \ln(k+1)(k+1-k) = \ln(k+1).$$

On en déduit l'inégalité voulue :

$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)$$

(b) Soit un entier $n \geqslant 2$, sommons l'inégalité précédente pour k variant de 1 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$$

or on a :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = S_{n-1}$.
- En effectuant le changement d'indice $j = k+1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{j=2}^{n} \ln(j) = S_n$ car $\ln(1) = 0$.
- D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

On obtient alors l'inégalité voulue pour un entier $n \geqslant 2$:

$$S_{n-1} \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n$$

(c) De l'inégalité précédente, on obtient directement une minoration de S_n pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n.$$

On peut également en déduire une majoration de S_n, en effet pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$S_{n-1} \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t$$

donc pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$S_n = S_{n-1} + \ln(n) \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n).$$

En résumé pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'encadrement :

$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n).$$

Il nous reste à calculer l'intégrale. Effectuons pour commencer une intégration par parties sur la première. On pose $\begin{cases} u(t) &= \ln(t) \\ v'(t) &= 1 \end{cases}$, on a alors $\begin{cases} u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t &= [\ln(t)t]_1^n - \int_1^n \frac{1}{t} \times t\mathrm{d}t \\ &= n\ln(n) - \ln(1) - \int_1^n 1\mathrm{d}t \\ &= n\ln(n) - (n-1) \\ &= n\ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant n\ln(n) - n + 1 + \ln(n),$$

soit

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n) - n + 1.$$

3. De l'inégalité précédente, on déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{n\ln(n)} \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} = 1 \text{ et } 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{n} = 1.$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n\ln(n)} = 1$ et donc $\boxed{S_n \sim n\ln(n)}$.

On a d'une part,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) = \ln(n!),$$

et d'autre part,

$$n\ln(n) = \ln(n^n).$$

On en déduit que $\boxed{\ln(n!) \sim \ln(n^n)}$.

Exercice 3

1. (a) Puisque I et J sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire de I et J reste dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (car c'est un espace vectoriel) donc f est une bien application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Montrons qu'elle est linéaire. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telles que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda c + c' \\ \lambda b + b' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= \frac{\lambda a + a' + \lambda d + d'}{2} I + \frac{\lambda b + b' + \lambda c + c'}{2} J \\ &= \lambda\left(\frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J\right) + \left(\frac{a'+d'}{2} I + \frac{b'+c'}{2} J\right) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

En conclusion, f est un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

(b) La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ étant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})).$$

Or on a $f(E_{1,1}) = \frac{1}{2}I, f(E_{1,2}) = \frac{1}{2}J, f(E_{2,1}) = \frac{1}{2}J$ et $f(E_{2,2}) = \frac{1}{2}I$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}I, \frac{1}{2}J, \frac{1}{2}J, \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}I, \frac{1}{2}J\right) = \mathrm{Vect}(I, J).$$

La famille (I, J) est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
En conclusion, la famille (I, J) est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(f)}$.

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a

$$M \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-d \\ c=-b \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow M = dU + cV \Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}(U, V)$$

où l'on a noté $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous venons donc de montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(U, V)$ et donc que (U, V) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$.
De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

La famille génératrice (U, V) étant de cardinal 2, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

(d) Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $f(M) = M$. Alors, pas définition, $M \in \mathrm{Im}(f)$ (elle admet bien un antécédent par f : elle-même).

($\Leftarrow$) Supposons que $M \in \mathrm{Im}(f)$. Par la question 1(b), on sait qu'il existe α et β deux réels tels que $M = \alpha I + \beta J$. Il vient alors, par linéarité de f,

$$f(M) = \alpha f(I) + \beta f(J) = \alpha I + \beta J = M$$

Donc $f(M) = M$.

En conclusion, on a bien montré que $\boxed{f(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathrm{Im}(f).}$

2. (a) Montrons que cette famille est une base. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique 4-plet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma I + \delta J$$

Or,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ -\alpha + \gamma = d \\ \beta + \delta = b \\ -\beta + \delta = c \end{cases}$$

On cherche donc à montrer que ce système a une unique solution. Résolvons-le.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ -\alpha + \gamma = d \\ \beta + \delta = b \\ -\beta + \delta = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+d}{2} = \gamma \\ \frac{b+c}{2} = \delta \\ a - \gamma = \alpha \\ b - \delta = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a-d}{2} \\ \beta = \frac{b-c}{2} \\ \gamma = \frac{a+d}{2} \\ \delta = \frac{b+c}{2} \end{cases}$$

Ce système a donc une unique solution.
En conclusion, la famille (A, B, I, J) est une $\boxed{\text{base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.
Remarque : On aurait également pu montrer que la famille (A, B, I, J) était libre puis que son cardinal était égal à la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) f est une application linéaire donc g en est également une par composition. Ainsi, f et g sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base. Prenons la base (A, B, I, J).
On remarque d'abord que A et B sont dans $\mathrm{Ker}(f)$ car $A = -U$ et $B = -V$ (question 1(c)). Ainsi,

$$f(A) = f(f(A)) = g(A) = 0 \text{ et } f(B) = f(f(B)) = g(B) = 0 \text{ (car } g \text{ étant linéaire}, g(0) = 0).$$

Ensuite, on a déjà remarqué que I et J que $f(I) = I$ et $f(J) = J$ (question 1 (d)), donc

$$f(I) = I = f(f(I)) = g(I) \text{ et } f(J) = J = f(f(J)) = g(J).$$

Nous venons de montrer que f et g coïncident sur la base (A, B, I, J).
En conclusion, les applications linéaires f et g $\boxed{\text{sont égales}}$.

Problème 1

Partie A

1. Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, la variable X_k suit $\boxed{\text{la loi uniforme sur } [\![1, n]\!]}$. Ainsi :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X_k = i) = \frac{1}{n}$$

Et donc l'espérance vaut :

$$E(X_k) = \frac{n+1}{2}.$$

2. (a) Si la première boule tirée est la boule numéro n, on a $T_n = 1$.
Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i}_{\geqslant 1} \geqslant n$, la variable T_n ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à n.
Enfin, toute valeur intermédiaire est possible : si $k \in [\![2, n]\!]$, alors la suite de tirages

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(k-1) \text{ premiers tirages}}, \overbrace{(n-k+1)}^{k\text{-ème tirage}} \quad \text{(par exemple)}$$

donne $T_n = k$ (puisque $S_{k-1} = k - 1 < n$ et $S_k = n$). Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

(b) La seule possibilité pour avoir $S_1 \geqslant n$ est de tirer la boule numéro n au premier tirage (et on aura alors en fait $S_1 = n$) :

$$[T_n = 1] = [X_1 = n].$$

Puisque X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$: $\boxed{P(T_n = 1) = \frac{1}{n}}$.

(c) L'événement $[T_n = n]$ est égal à :

$$\begin{aligned}
[S_{n-1} \leqslant n-1] \cap [S_n \geqslant n] &= \underbrace{[\overbrace{\overbrace{X_1}^{\geqslant 1} + \cdots + \overbrace{X_{n-1}}^{\geqslant 1}}^{\geqslant n-1} \leqslant n-1]}_{\text{donc égalité partout}} \cap [S_n \geqslant n] \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [S_n \geqslant n] \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_1 + \cdots + X_n \geqslant n] \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] \cap \underbrace{[X_n \geqslant 1]}_{\text{toujours vrai}} \\
&= [X_1 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1]
\end{aligned}$$

Par indépendance de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ (les tirages sont avec remise) :

$$P(T_n = n) = \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. D'après la question 2 :

$$T_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad ; \quad P(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. D'après la question 2 :

$$T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad ; \quad P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

Et par conséquent :

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Calculons l'espérance de T_3 :

$$E(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Partie B

1. Comme déjà précisé en partie A pour S_n et S_{n-1}, la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donné la boule numéro 1.
Elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n.
On a alors $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]}$.
Remarque : On n'a, en fait, montré qu'une inclusion $S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!]$ mais on peut supposer que le correcteur se contentera de cette réponse, l'égalité étant un peu difficile à prouver.

2. (a) On a immédiatement :

$$S_{k+1} = X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

(b) Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[S_k = j]\}_{j \in [\![k,nk]\!]}$ donne :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} P\big([S_{k+1} = i] \cap [S_k = j]\big) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P\big([S_k + X_{k+1} = i] \cap [S_k = j]\big) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P\big([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]\big) \end{aligned}$$

L'événement $[X_{k+1} = i - j]$ étant impossible si $i - j \notin [\![1, n]\!]$, on peut ne conserver dans cette somme que les termes tels que $1 \leqslant i - j \leqslant n$, c'est-à-dire (la deuxième des inégalités précédentes étant réalisée car $i \leqslant n$) tels que $j \leqslant i - 1$, les autres termes étant nuls. Puisque $i - 1 \leqslant nk$ (car $i \leqslant n$ et $k \geqslant 1$), on a :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P\big([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]\big)$$

Enfin, les variables $X_1, \ldots, Xk, X_{k+1}$ étant indépendantes, le lemme des coalitions (RDV en deuxième année) donne l'indépendance des deux variables $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et X_{k+1} et cela démontre l'égalité admise dans le sujet : $P([X_{k+1} = i - j] \cap [S_k = j]) = P(X_{k+1} = i - j)P(S_k = j)$.
D'où avec la question 1. (X_{k+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$) :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{P(X_{k+1} = i - j)}_{=\frac{1}{n}} \times P(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

3. (a) La formule du triangle de Pascal s'écrit, pour $k, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouvons par récurrence sur i que :

$$\forall i \geqslant k+1, \quad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

On pose pour $i \geqslant k + 1$, $\mathcal{H}(i)$: « $\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ ».

Initialisation pour $i = k+1$, la somme ne comporte qu'un seul terme : $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$ et $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.

Hérédité Supposons, pour un entier $i \geqslant k+1$ fixé que $\mathcal{H}(i)$ est vraie et montrons que $\mathcal{H}(i+1)$ est vraie :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\
&= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{i}{k} \quad \text{d'après le triangle de Pascal} \\
&= \binom{(i+1)-1}{k}
\end{aligned}$$

La formule est ainsi prouvée pour $i+1$ et $\mathcal{H}(i+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $i \geqslant k+1$.

(c) **Initialisation** $(k=1)$ On a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ \frac{1}{n}\underbrace{\binom{i-1}{0}}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

Comme $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ d'après la question 1., on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(S_1 = i) = \frac{1}{n}$ et donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Hérédité Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$, supposons $\mathcal{H}_k$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

Soit $i \in [\![k+1,n]\!]$. D'après la question 2.(b) de la partie B et par hypothèse de récurrence :

$$P(S_{k+1}=i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}$$

Et donc, d'après la question 3.(b) de la Partie B :

$$P(S_{k+1}=i) = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

On a ainsi prouvé $\mathcal{H}_{k+1}$.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

4. (a) L'événement $[T_n > k]$ signifie que la somme des numéros des boules obtenues est pour la première fois supérieure ou égale à n lors du tirage numéro ℓ avec $\ell > k$, autrement dit que lors du tirage numéro k, la somme des numéros des boules obtenues est *strictement* inférieure (négation de « supérieure ou égale ») à n, c'est-à-dire $[S_k < n] = [S_k \leqslant n-1]$:

$$[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1].$$

(b) En écrivant, avec une union d'événements incompatibles :

$$[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1] = \bigcup_{i=1}^{n-1}[S_k = i]$$

on obtient, avec 3.(c) puis 3.(b) de la Partie B :

$$P(T_n > k) = \sum_{i=1}^{n-1} P(S_k = i) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

5. (a) $[T_n \leqslant k] = [T_n = k] \cup [T_n \leqslant k-1]$ donc

$$P(T_n \leqslant k) = P(T_n = k) + P(T_n \leqslant k-1)$$

d'où

$$1 - P(T_n > k) = P(T_n = k) + 1 - P(T_n > k-1).$$

On en déduit que $\boxed{P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)}$.

(b) La variable aléatoire T_n ($T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$) étant finie, elle admet en effet une espérance et :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n = k).$$

En écrivant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \; P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k-1)}_{\substack{=0 \\ \text{pour } k=1}} \; P(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^{n} P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1) \; P(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^{n} P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k)
\end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = k-1$ dans les deux premières sommes :

$$E(T_n) = \cancel{\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \; P(T_n > \ell)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} k \; P(T_n > k)} = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell).$$

(c) Avec la question 4.(b), on a donc :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \times 1^{(n-1)-k} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n-1}}_{\text{par la formule du binôme de Newton}}$$

6. On va déterminer la limite de $E(T_n)$ en écrivant l'expression trouvée ci-dessus sous « forme exponentielle » :

$$E(T_n) = \exp\left((n-1)\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right)$$

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1) \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$E(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1) = \mathrm{e}.$$

7. Python

```python
def T(n):
    S=0
    y=0
    while S<n :
        tirage=rd.randint(1,n+1)
        S=S+tirage
        y=y+1
    return y
```

Problème 2 *EML 2021, voie E*

Partie A : Etude de la fonction φ

1. La fonction φ est continue sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]-\infty, 1[$. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est bien continue sur $]-\infty, 1[$ car $1-x>0$ sur cet intervalle.
   Il reste donc à étudier la continuité de φ en 1. Pour cela, calculons les limites à gauche et à droite en 1. On a :
   $$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \varphi(1) = 1$$
   et
   $$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} x + (1-x)\ln(1-x)$$
   or $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{u\to 0^+} u\ln(u) = 0$ par croissance comparée. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = 1 = \varphi(1)$. La fonction φ est donc bien continue en 1.On peut donc conclure que $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]-\infty, 1]}$.

2. (a) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
   Soit $x \in]-\infty, 1[$.
   $$\varphi'(x) = 1 + (-1)\times\ln(1-x) + (1-x)\times\left(-\frac{1}{1-x}\right) = \cancel{1} - \ln(1-x) - \cancel{1}$$
   Finalement, $\boxed{\text{pour } x \in]-\infty, 1[, \quad \varphi'(x) = -\ln(1-x)}$.

   (b) Soit $x \in]-\infty, 1[$.
   $$\begin{array}{rcll} \varphi'(x) > 0 & \Leftrightarrow & -\ln(1-x) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(1-x) < 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1-x < \mathrm{e}^0 = 1 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 0 < x & \end{array}$$
   On obtient le tableau de variations suivant.

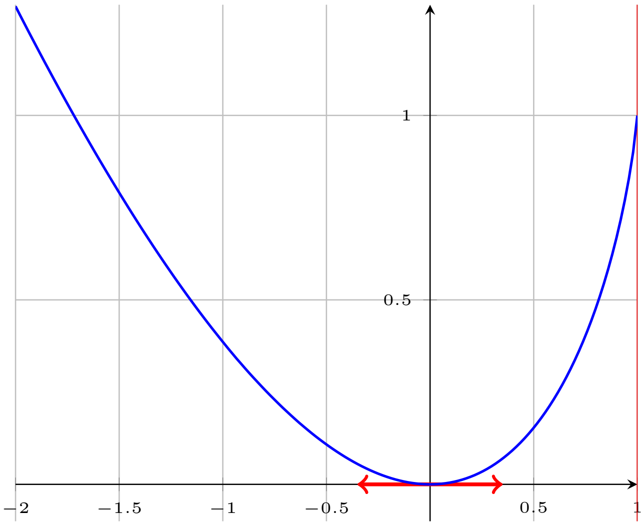
x	$-\infty$		0		1
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

   Détaillons le calcul de $\varphi(0)$:
   $$\varphi(0) \ = \ 0 + (1-0)\ \ln(1-0) \ = \ \ln(1) \ = \ 0$$

   (c) Pour étudier la dérivabilité de φ, étudions la limite quand x tend vers 1 de son taux d'accroissement en 1.
   Soit $x \in]-\infty, 1[$.
   $$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} &= \frac{x + (1-x)\ \ln(1-x) - 1}{x-1} \\ &= \frac{x-1-(x-1)\ \ln(1-x)}{x-1} \\ &= \frac{\cancel{(x-1)}\,\big(1-\ln(1-x)\big)}{\cancel{x-1}} \\ &= 1 - \ln(1-x) \end{aligned}$$
   Or, avec le changement de variable $u = 1-x$:
   $$\lim_{x\to 1} 1 - \ln(1-x) \ = \ \lim_{u\to 0} 1 - \ln(u) \ = \ +\infty$$
   Le taux d'accroissement de φ en 1 n'admet donc pas de limite finie en 1. $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.

3. Il s'agit a priori d'une forme indéterminée. On a :
$$\varphi(x) = x + \ln(1-x) - x\ln(1-x).$$
Factorisons par le terme prépondérant, à savoir $x\ln(1-x)$, on obtient :
$$\varphi(x) = x\ln(1-x)\left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} - 1\right)$$
or $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln(1-x)} = 0$ par composée de limites et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ainsi $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} - 1\right) = -1$. De plus, par produit, $\lim_{x\to-\infty} x\ln(1-x) = -\infty$. On conclut par produit de limites que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty}$.

4. D'après la question 2.(c) : $\lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est tangente à la courbe représentative de φ en 1. On obtient la courbe suivante :



5. (a) Soit $A \in]0,1]$.
On procède par intégration par parties.
$$\left|\begin{array}{lllll} u(t) & = & \ln(t) & u'(t) & = & \frac{1}{t} \\ v'(t) & = & t & v(t) & = & \frac{1}{2}\,t^2 \end{array}\right.$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, 1]$.
On obtient :
$$\begin{aligned} \int_A^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\,t^2\,\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t}\times\frac{1}{2}\,t^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\cancel{1^2\,\ln(1)} - A^2\,\ln(A)\right) - \frac{1}{2}\int_A^1 t\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\,A^2\,\ln(A) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,t^2\right]_A^1 \\ &= -\frac{1}{2}\,A^2\,\ln(A) - \frac{1}{4}\,(1-A^2) \end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{\int_A^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,A^2\,\ln(A) - \frac{1}{4}\,(1-A^2)}$.

(b) D'une part, par croissances comparées : $\lim_{A\to 0} A^2\,\ln(A) = 0$ et d'autre part : $\lim_{A\to 0} A^2 = 0$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\boxed{\int_0^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}}$.

(c) • D'après la question 1., la fonction φ est continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ est donc bien définie.

• On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 t + (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Notons qu'on peut bien appliquer la linéarité de l'intégrale car les intégrales $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 t\mathrm{d}t$ sont convergentes, et donc l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t$ est bien convergente.

• Tout d'abord :

$$\int_0^1 t\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

• Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t$ (dont on sait qu'elle est convergente), on effectue le changement de variable $u = 1 - t$. On a alors :

⋆ $t = 1 - u$
⋆ $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$
⋆ Quand $t = 0$, $u = 1$
⋆ Quand $t = 1$, $u = 0$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1 - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\mathrm{d}t = \int_1^0 u\ \ln(u)\ (-\ du) = \int_0^1 u\ \ln(u)\ du = -\frac{1}{4}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la question précédente.

On en déduit : $\boxed{\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.}$

Partie B : Etude de deux séries

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$. Comme $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}.$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, x],\ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x. On obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

Étudions le membre de gauche. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^x t^k \mathrm{d}t\right) \\
&= [-\ln(1-t)]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{k+1}\ t^{k+1}\right]_0^x \\
&= -\ln(1-x) + \cancel{\ln(1-0)} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\left(x^{k+1} - 0^{k+1}\right) \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{x^j}{j} \qquad \textit{(en effectuant le changement d'indice j=k+1)}
\end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t}$.

2. Soit $t \in [0,x]$, on a :

$$0 \leqslant t \leqslant x \quad \text{donc} \quad 0 \geqslant -t \geqslant -x \quad \text{d'où} \quad 1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x.$$

Alors par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$. On a :

$$1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi comme $t^n \geqslant 0$, on a :

$$t^n \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.$$

On a donc $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$.

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{n+1}\ t^{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On obtient :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

De plus comme, $x < 1$, on a, par croissance de $t \mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, $x^{n+1} \leqslant 1$. Comme $(n+1)(1-x) > 0$, on obtient :

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$

On peut donc conclure que $\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}}$.

On remarque alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$ donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

3. D'après la question 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \;=\; -\ln(1-x) + 0$$

Par ailleurs, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$.

4. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} & = & \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} \\
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} & = & \dfrac{a\,(n+1) + b\,n}{n\,(n+1)} \\
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 & = & a\,(n+1) + b\,n \\
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 & = & a + (a+b)\,n \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array}\right. & & \textit{(par identification)} \\
L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ & & b & = & -1 \end{array}\right. & &
\end{array}$$

Finalement, en choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} x^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) & \textit{(d'après 4.(a))} \\
 & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \\
 & = & x \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \\
 & = & x \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
 & = & x \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} - \frac{x^1}{1}\right) & \\
 & = & x + x \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} &
\end{array}$$

Or d'après la question 3., la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est convergente, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ converge.}}$

De plus, toujours d'après la question 3. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \;=\; x + x \times \big(-\ln(1-x)\big) - \big(-\ln(1-x)\big)$$

On obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x) = \varphi(x).}$

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) && \textit{(d'après 4.(a))}\\ &= 1 - \frac{1}{N+1} && \textit{(par télescopage)}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n+1)} = 1 = \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilités

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, si $N = n$ alors il y a $n-1$ boules bleues et une boule rouge dans l'urne. Cela signifie qu'on a rajouté $n-2$ boules bleues i.e. qu'on a tiré $n-2$ une boule bleue puis pour finir, on a tiré la boule rouge. Notons pour $k \in [\![1, n]\!]$, B_k l'événement « Tirer une boule bleue au k-ème tirage ». On a alors (en utilisant la formule des probas composées) :

$$\begin{aligned}P(T=n) &= P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap \overline{B}_{n-1})\\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_3) \times P_{B_1\cap B_2}(B_3) \times \ldots P_{B_1\cap \ldots B_{n-3}}(B_{n-2}) \times P_{B_1\cap\ldots B_{n-2}}(\overline{B}_{n-2})\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{(n-1)n} \quad \text{produit télescopique}\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $P(T=n) = \frac{1}{n(n-1)}$.

(b) T admet une espérance ssi la série $\displaystyle\sum_{n\in T(\Omega)} nP(T=n)$ est convergente. Or :

$$T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad P(T=n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

Cela revient donc à étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{n(n-1)} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n-1}$. Or

$$\frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$$

et $\frac{1}{n}$ est le terme général de la série harmonique qui est divergente. Comme les séries sont à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n-1}$ diverge et que donc T n'admet pas d'espérance.

2. On peut proposer le programme suivant :

```
def simulN():
    b=1
    while np.rand() < 1/(b+1) :
        b=b+1
    N= b+1
    return N
```