Concours Blanc n° 2

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet propose deux pistes :

- **Piste bleue** : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 3, Problème 2
- **Piste rouge** : Problème 1, Problème 2, Problème 3

Exercice 1 *Piste bleue uniquement*

Soit $n \geqslant 2$, et Φ l'application qui à tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme :

$$\Phi(P) = 3xP' + \left(x^2 - 1\right) P'',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Phi\left(x^k\right)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer alors une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 2 *Piste bleue uniquement*

Dans tout l'exercice, $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose également $I = I_2$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, associe la matrice

$$f(M) = \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J.$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\quad f(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathrm{Im}(f)$.
2. On pose $A = E_{1,1} - E_{2,2}$, $B = E_{1,2} - E_{2,1}$ et on considère la famille (A, B, I, J).
   (a) Montrer que cette famille est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) On pose $g = f \circ f$. Montrer que les applications f et g sont égales.
   On rappelle que deux applications linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base.

Exercice 3 *Piste bleue uniquement*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. Recopier et compléter la fonction suivante qui calcule, pour un entier n donné en entrée, la valeur de S_n.

```
def somme(..............):
    S = ....................
    for k in range(....................):
        ..... = ....................
    return ....................
```

2. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$S_{n-1} \leqslant \int_1^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n$$
   (c) Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n) - n + 1.$$

3. Déduire de la question précédente un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$ puis que
$$\ln(n!) \sim \ln(n^n).$$

Problème 1 *Piste rouge uniquement*

Dans tout l'exercice, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement $E = \mathbb{R}^3$, et on note $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (-x+y+z, -6x+4y+2z, 3x-y+z) \end{cases}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Justifier que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Partie II : Étude générale des endomorphismes vérifiant $f^2 = \lambda f$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note $A_\lambda = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid f^2 = \lambda f \right\}$.

5. Déterminer tous les isomorphismes de E qui appartiennent à A_λ.
6. Soit $f \in A_\lambda$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Prouver qu'il existe un projecteur p tels que $f = \lambda \mathrm{Id}_E \circ p$.

Partie III : Endomorphismes vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}_E$

7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Si v est un vecteur non nul de E, on notera $F_v = \mathrm{Vect}(v, f(v))$.
   Dans toute la suite de la question, on fixe un vecteur u non nul.
   (a) i. Justifier que $(u, f(u))$ est une famille libre.

ii. Montrer que F_u est stable par f.

iii. Vérifier que $u \in F_u$.

iv. Soit H un sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant u, montrer que $F_u \subset H$.
On a alors montré que F_u est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant u et stable par f

(b) Soit $a \in F_u \backslash \{0_E\}$.

i. Montrer que $F_a \subset F_u$.

ii. En déduire que $F_a = F_u$.

(c) Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f et ne contenant pas u.

i. Montrer que G et F_u sont en somme directe. *On pourra raisonner par l'absurde.*

ii. Montrer que $G \oplus F_u$ est stable par f.

(d) On pose $p = \left\lfloor \dfrac{\dim(E)}{2} \right\rfloor$.
Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tels que $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k))$ soit une famille libre et $\mathrm{Vect}((u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_k, f(u_k)))$ soit stable par f.

(e) Prouver alors qu'il existe des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ tels que $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$ soit une base de E.

(f) Qu'en déduit-on quant à la parité de la dimension de E ?

8. Réciproquement, prouver que si E est un espace vectoriel de dimension paire, alors il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Problème 2 *Pistes bleue ET rouge*

Soit n un entier naturel non nul. On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie I

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

   (b) Calculer $P(T_n = 1)$.

   (c) Montrer que :
$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie II

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.

(b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

On admettra que $P([X_{k+1} = i-j] \cap [S_k = j]) = P(X_{k+1} = i-j)P(S_k = j)$.

3. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

4. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

5. (a) Justifier que $P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$.

   (b) En déduire que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$.

   (c) En déduire que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

6. Calculer $\lim_{n \to +\infty} E(T_n)$.

7. **Python** On rappelle que l'instruction `rd.randint(1,n+1)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$ selon la loi uniforme. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```python
def T(n):
    S = ................
    y = ................
    while  ......................  :
        tirage=rd.randint(1,n+1)
        S=S+tirage
        y = ...............
    return y
```

Problème 3 *Piste rouge uniquement*

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty,1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty,1]$.
2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et calculer, pour tout $x \in]-\infty,1[$, $\varphi'(x)$.
   (b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty,1]$.
   (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
5. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.
   (b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

Partie II : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

1. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

   En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
3. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.
5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.