Concours Blanc n° 2

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé de trois exercices et de deux problèmes. Bon courage !

Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$, et Φ l'application qui à tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme :

$$\Phi(P) = 3xP' + \left(x^2 - 1\right) P'',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Calculer pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Phi\left(x^k\right)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer alors une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. Recopier et compléter la fonction suivante qui calcule, pour un entier n donné en entrée, la valeur de S_n.

```
def somme(..............):
    S = ....................
    for k in range(....................):
        ..... = ....................
    return ....................
```

2. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)$$

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_{n-1} \leqslant \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n$$

(c) Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n) - n + 1.$$

3. Déduire de la question précédente un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$ puis que

$$\ln(n!) \sim \ln\left(n^n\right).$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose également $I = I_2$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, associe la matrice

$$f(M) = \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J.$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\quad f(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathrm{Im}(f)$.
2. On pose $A = E_{1,1} - E_{2,2}$, $B = E_{1,2} - E_{2,1}$ et on considère la famille (A, B, I, J).
   (a) Montrer que cette famille est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) On pose $g = f \circ f$. Montrer que les applications f et g sont égales.
   On rappelle que deux applications linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base.

Problème 1 *D'après Ecricome, voie E*

Soit n un entier naturel non nul. On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que :
   $$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$
   On admettra que $P([X_{k+1} = i-j] \cap [S_k = j]) = P(X_{k+1} = i-j)P(S_k = j)$.

3. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

4. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

5. (a) Justifier que $P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$.

   (b) En déduire que $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$.

   (c) En déduire que $E(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

6. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n)$.

7. **Python** On rappelle que l'instruction `rd.randint(1,n+1)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$ selon la loi uniforme. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
def T(n):
    S = ................
    y = ................
    while  ......................  :
        tirage=rd.randint(1,n+1)
        S=S+tirage
        y = ...............
    return y
```

Problème 2 *EML 2021, voie E*

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :
$$\forall x \in\ ]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.
2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in\ ]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

   (b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

   (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
5. (a) Soit $A \in]0; 1[$. Calculer, en fonction de A, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_A^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

(c) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

1. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \ = \ \frac{t^n}{1-t}$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \ = \ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

2. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \ \leqslant \ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \ \leqslant \ \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

   En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

3. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \ = \ -\ln(1-x)$.

4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n\,(n+1)} \ = \ \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \ = \ \varphi(x)$.

5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \ = \ \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilités

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. (a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, P\big([N=n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

   (b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
def simulN():
    b=1
    while np.rand() < ..... :
        b=b+1
    N = ................
    return N
```