Corrigé du CB n° 1

Exercice 1

1. On pose
$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$
et on note $\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On calcule $B\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma)B$ et l'on montre (en raisonnant par équivalences) que
$$B\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma) = \operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma)B \iff \begin{cases} \beta b = \alpha b \\ \gamma c = \alpha c \\ \alpha d = \beta d \\ \gamma f = \beta f \\ \alpha g = \gamma g \\ \beta h = \gamma h \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases},$$
la dernière équivalence découlant de ce que les trois réels α, β et γ sont distincts. Ainsi l'ensemble cherché est l'ensemble des matrices diagonales.

2. (a) Méthode habituelle par résolution de système linéaire. On trouve que P est inversible et
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) On trouve que $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **Analyse**

   (a) On peut écrire $AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA$. Ainsi $AM = MA$ et les matrices A et M commutent.

   (b) On en déduit alors que
$$P^{-1}MPD = P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}(MA)P = P^{-1}(AM)P = P^{-1}APP^{-1}MP = DP^{-1}MP.$$
   Ainsi les matrices $P^{-1}MP$ et D commutent.

   (c) D'après la question préliminaire, comme 8,0 et 1 sont trois réels distincts et que la matrice $P^{-1}MP$ commutent avec $\operatorname{diag}(8,0,1)$. La matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

   (d) Comme $\Delta = P^{-1}MP$ alors $\Delta^3 = P^{-1}M^3P = P^{-1}AP = D$. Posons alors
$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
   Alors $\Delta^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$. Donc
$$\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $a^3 = 8$ i.e. $a = 2$. De même $b = 0$ et $c = 1$. Soit :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Comme $\Delta = P^{-1}MP$ alors $M = P\Delta P^{-1}$. En explicitant les trois matrices et en faisant un calcul de produit de trois matrices, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. **Synthèse** On pose M comme à la question précédente et on calcule M^3. On trouve bien A.

Problème 1

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions de référence qui sont bien dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{6x^3 - 6}{x} = 6 \times \dfrac{x^3 - 1}{x}$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 0 \iff x^3 - 1 = 0 \iff x = 1$. L'équation $g'(x) = 0$ admet donc bien une unique solution $p = 1$.

(c) On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖	↘	$g(1)$	↗	

(d) On a $g(p) = g(1) = 2 + 3 = 5$. Comme g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, elle atteint un minimum en 1. Or $g(1) > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{g(x) > 0}$.

2. (a) On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x + \frac{3\ln(x)}{x^2}}{x} = 2 + \frac{3\ln(x)}{x^3}.$$

On sait que par croissance comparée $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^3} = 0$ donc $\boxed{a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - ax = \dfrac{3\ln(x)}{x^2}$. Or par croissance comparée $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\boxed{b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = 0}$.

(c) On définit la droite $(\mathcal{A})$ d'équation $y = 2x$. D'après la question précédente $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$, ainsi la droite $(\mathcal{A})$ est asymptote de $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$.
Pour déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $(\mathcal{A})$, étudions le signe de $f(x) - 2x$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2}.$$

On a : $\ln(x) > 0 \iff x > 1$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$. Ainsi pour $0 < x \leqslant 1$, $f(x) - 2x \leqslant 0$ et pour $x > 1$, $f(x) - 2x > 0$. On en déduit que sur l'intervalle $]0, 1]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe en-dessous de $(\mathcal{A})$ et sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de la droite $(\mathcal{A})$.

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

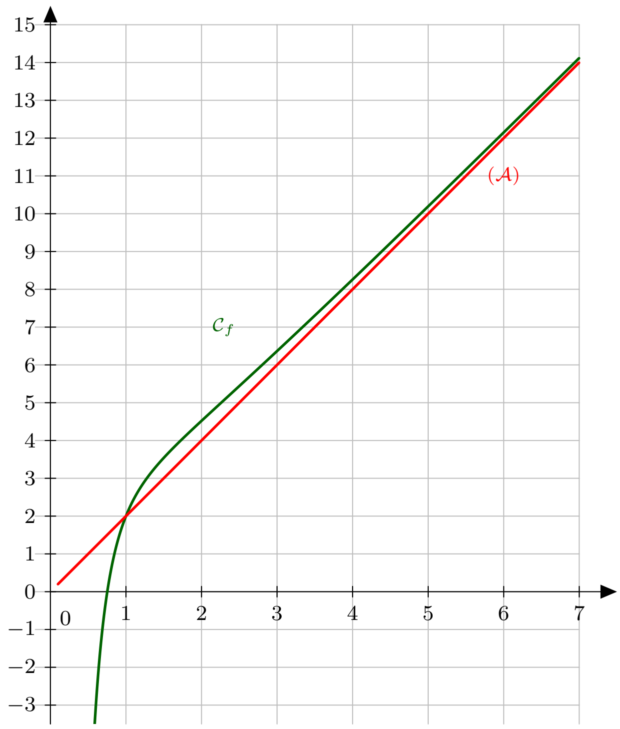
$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{3}{x} \times x^2 - 3\ln(x) \times 2x}{x^4} = 2 + \frac{3x - 6x\ln(x)}{x^4} = 2 + 3x \times \frac{1 - 2\ln(x)}{x^4} = 2 + \frac{3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3}.$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}}$.

(b) D'après la question 1.(c), on sait que $g(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $x^3 > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	
Variations de f	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(c) On a le graphe suivant :



(d) On peut écrire le script suivant :

```
def f(x):
    y = 2*x+3*np.log(x)/x**2
    return y

import matplotlib.pyplot as plt
abscisse=np.arange(0.1,10,0.001)
plt.plot(abscisse,f(abscisse))
```

4. (a) On a montré à la question 3.(b) que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de plus elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi d'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(\mathbb{R}_+^*)$. Or $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
Soit $n \geqslant 1$, $2n \in \mathbb{R}$ donc admet un unique antécédent $x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi l'équation $f(x) = 2n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) Par définition de x_n, on a $\boxed{f(x_n) = 2n}$. De plus, $\boxed{f(1) = 2}$ et $\boxed{f(n) = 2n + \dfrac{3\ln(n)}{n^2}}$.

Soit $n \geqslant 1$, on a $2n \geqslant 2$. De plus, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{3\ln(n)}{n^2} \geqslant 0$, ainsi $f(n) \geqslant 2n$. On en déduit que $\boxed{f(1) \leqslant f(x_n) \leqslant f(n)}$.

Comme la fonction f est strictement croissante, les inégalités précédentes impliquent que $\boxed{1 \leqslant x_n \leqslant n}$.

(c) Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$f(x_n) = 2n \iff 2x_n + \frac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \iff 2n - 2x_n = \frac{3\ln(x_n)}{x_n^2} \iff \frac{2n - 2x_n}{2n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2} \iff 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}.$$

(d) On sait que pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant x_n \leqslant n$ donc par croissance de la fonction $\ln$, on a :

$$0 \leqslant \ln(x_n) \leqslant \ln(n).$$

De plus, pour $n \geqslant 1$, $n(x_n)^2 > 0$, on a donc :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n(x_n)^2},$$

comme pour $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant 1$, on a $(x_n)^2 \geqslant 1$ et par passage à l'inverse $\dfrac{1}{(x_n)^2} \leqslant 1$. On en déduit donc l'inégalité pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}.$$

(e) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée. Ainsi par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0.$$

Cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 0$. Or d'après la question 4.(c),

$$\frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 1 - \frac{x_n}{n}.$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{x_n}{n} = 0$$

soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1}$.

Problème 2

Partie I : étude d'une suite

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$$

Ainsi, la suite (H_n) est $\boxed{\text{croissante}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \in [n+1, 2n]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$. En sommant terme à terme pour k allant de $n+1$ à $2n$, on obtient :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}}$.

(c) La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, il y a deux cas possibles :

i. Soit la suite converge et admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R}$,

ii. Soit la suite diverge vers $+\infty$ et donc admet $+\infty$ comme limite.

(d) Raisonnons par l'absurde : on suppose que (H_n) converge. Alors, en notant ℓ sa limite, on a, d'après le théorème des suites extraites, (H_{2n}) converge vers ℓ. On en déduit que $H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi en passant à la limite dans l'inégalité de la question 1.(b), on obtient

$$0 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ceci est évidemment une contradiction, donc la suite (H_n) ne converge pas. En conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$.

(e) i. On peut écrire la fonction suivante :

```python
def calcul_H( n ):
    H = 0
    for k in range (1, n+1) :
        H = H+1/k
    return H
```

ii. On peut compléter le script comme suit :

```python
def rang():
    H = 0
    n = 0
    while H< 10**5 :
        n = n+1
        H = H + 1/n
    return( n )
```

2. (a) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction $x \mapsto 1+x$ est définie sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^+$, la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout réel $x > -1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Or, $x+1>0$ sur cet intervalle. On en déduit le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x > -1$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$. On en conclut que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part, comme $\dfrac{1}{n+1} \in]-1,+\infty[$, on a, d'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'autre part, comme $-\dfrac{1}{n+1} \in]-1,+\infty[$, on a, d'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

Donc

$$-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1},$$

or $-\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, on obtient alors :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

En combinant les deux inégalités, on a bien le résultat souhaité.

(c) Montrons que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

- $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \geqslant 0$ d'après l'inégalité précédente donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant 0$ d'après l'inégalité précédente donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
- $v_n - u_n = H_n - \ln(n) - H_n + \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. Or on a :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 0$.

En conclusion, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont $\boxed{\text{adjacentes donc convergent vers une même limite (notée } \gamma\text{)}}$.

3. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $S_n = H_{2n} - H_n$ ».

Initialisation d'une part, $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et d'autre part :

$$H_2 - H_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Par définition :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_n + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$S_{n+1} = H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Or

$$H_{2n+2} - H_{n+1} = H_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - H_n - \frac{1}{n+1} = H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_{2n} - H_n$.

(b) Par définition de la suite (v_n) on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_n = v_n + \ln(n)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = v_{2n} + \ln(2n) - v_n - \ln(n).$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n = v_{2n} - v_n + \ln(2)}$.

(c) On a montré à la question 2.(c) que la suite (v_n) converge vers γ. Donc d'après le théorème des suites extraites, (v_{2n}) converge elle aussi vers γ. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{2n} - v_n) = 0$ et donc par somme de limites, la suite (S_n) $\boxed{\text{converge vers } \ln(2)}$.

Partie II : formule d'inversion de Pascal

1. Soient i, k et n trois entiers naturels tels que $i \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!}{(k-i)!i!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!} \\
&= \frac{n!(n-i)!}{(n-i)!(n-k)!(k-i)!i!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!((n-i)-(n-k))!} \\
&= \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{i}{k}u_i \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{i}{k}u_i \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}u_i \text{ d'après la question précédente} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}u_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u_i\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-i}{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u_i\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{j}\binom{n-i}{j} \text{ en posant } j = n-k
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{j}\binom{n-i}{j} = (1-1)^{n-i} = 0^{n-i}$.

Or $0^{n-i} = 0$ pour $i \neq n$ et 1 sinon, on a alors :

$$\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{j}\binom{n-i}{j} = \begin{cases} 0 \text{ si } n > i \\ 1 \text{ si } n = i \end{cases}$$

Autrement dit, dans la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u_i\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{j}\binom{n-i}{j}$, tous les termes sont nuls, sauf celui obtenu pour $i = n$ qui vaut : $\displaystyle\binom{n}{n}u_n 0^0 = u_n$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k.}$.

Partie III : une application

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - x \neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \frac{1-(1-x)^n}{x}$$

2. (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{k-1}$$

Si $x = 0$ alors $f_n'(0) = \binom{n}{1}(-1)^1 0^0 = -n$ (donc la formule demandée est vraie pour $x = 0$). Sinon :

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k - 1 \right)$$

Donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} \left((1-x)^n - 1 \right) = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k \text{ d'après la question précédente}$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f_n'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k}$.

(b) Intégrons terme à terme la relation obtenue à la question précédente, la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}$ est une primitive de f_n donc il existe un réel λ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} + \lambda$$

Comme on a clairement $f_n(0) = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-0)^{k+1}}{k+1} + \lambda = 0 \text{ donc } \lambda = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-0)^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -H_n$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} - H_n}$.

(c) D'après la relation de la question précédente, $f_n(1) = 0 - H_n$. Donc par définition de f_n, $\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$.

3. On reprend les notations de la question 2 : on pose donc $u_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$ (formule valable en posant $H_0 = 0$) on a, d'après la formule d'inversion de Pascal, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} H_k$$

Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} H_k$$

Donc en multipliant par $(-1)^{n+1}$,

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2n+1-k} \binom{n}{k} H_k$$

Enfin $(-1)^{2n+1-k} = (-1)^{2n+1}(-1)^{-k} = -(-1)^k = (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} H_k}$.

Problème 3

1. On trouve $T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$ et $T_4(x) = 2x\left(4x^3 - 3x\right) - \left(2x^2 - 1\right) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.
2. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n)$: « $T_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients entiers » est vraie.

   Initialisation pour $n = 0, T_0(x) = 1$, donc $T_0(x)$ est un polynôme de degré 0 à coefficients entiers, d'où $\mathcal{A}(0)$ est vraie.
   Pour $n = 1, T_1(x) = x$, donc $T_1(x)$ est un polynôme de degré 1 à coefficients entiers, d'où $\mathcal{A}(1)$ vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{A}(n+2)$ est vraie.
   Par définition, on a, d'une part :
$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$
   et d'après l'hypothèse de récurrence, $2x, T_n(x)$ et $T_{n+1}(x)$ sont des polynômes à coefficients entiers donc $T_{n+2}(x)$ l'est également.
   D'autre part d'après l'hypothèse de récurrence,
$$\deg\left(2xT_{n+1}(x)\right) = \deg(2x) + \deg\left(T_{n+1}(x)\right) = 1 + n + 1 = n + 2$$
   et
$$\deg\left(T_n(x)\right) = n \neq n + 2 = \deg\left(2xT_{n+1}(x)\right),$$
   donc :
$$\deg\left(T_{n+2}(x)\right) = \max\left(\deg\left(2xT_{n+1}(x), \deg\left(T_n(x)\right)\right)\right) = \deg\left(2xT_{n+1}(x)\right) = n + 2,$$
   d'où $\mathcal{A}(n+2)$ vraie.

   Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients entiers.
3. (a) Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n)$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ » est vraie.

   Initialisation pour $n = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(-x) = 1 = (-1)^0 T_0(x)$, d'où $\mathcal{A}(0)$ vraie.
   Pour $n = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_1(-x) = -x = (-1)^1 T_1(x)$, d'où $\mathcal{A}(1)$ vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{A}(n+2)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'énoncé : $T_{n+2}(-x) = -2xT_{n+1}(-x) - T_n(-x)$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence :
$$T_{n+2}(-x) = -2x(-1)^{n+1}T_{n+1}(x) - (-1)^n T_n(x) = (-1)^{n+2} 2xT_{n+1}(x) - (-1)^n T_n(x)$$
   Or $(-1)^{n+2} = (-1)^2(-1)^n = (-1)^n$ donc
$$T_{n+2}(-x) = (-1)^{n+2}\left(2xT_{n+1}(x) - T_n(x)\right) = (-1)^{n+2} T_{n+2}(x).$$
   Donc $\mathcal{A}(n+2)$ est vraie.

   Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

   (b) La question précédente assure que la fonction T_n est de même parité que n i.e. T_n est $\boxed{\text{une fonction paire pour } n \text{ pair}}$ et $\boxed{T_n \text{ est une fonction impaire pour } n \text{ impair}}$.
4. Pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on notera $cd(P)$ le coefficient dominant de P.
   Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $cd\left(T_n\right) = 2^{n-1}$ » est vraie.

   Initialisation pour $n = 1$, $T_1 = x$, donc $cd\left(T_1\right) = 1 = 2^{1-1}$, d'où $\mathcal{P}(1)$ vraie.
   Pour $n = 2$, $T_2 = 2x^2 - 1$, donc $cd\left(T_1\right) = 2 = 2^{2-1}$, d'où $\mathcal{P}(2)$ vraie.

   Hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Par définition, on a :
$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$
   et on sait que $\deg\left(T_n(x)\right) = n < n + 2$ donc le coefficient dominant de $T_{n+2}(x)$ est celui de $2xT_{n+1}(x)$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$cd\left(T_{n+2}\right) = 2cd\left(T_{n+1}\right) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$
   D'où $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.

   Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de $T_n(x)$ est 2^{n-1}.
5. (a) Montrons donc par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $T_n(1) = 1$ » est vraie.

   Initialisation pour $n = 1$, $T_1(x) = x$, donc $T_1(1) = 1$, d'où $\mathcal{P}(1)$ vraie.
   Pour $n = 2$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, donc $T_2(1) = 2 - 1 = 1$, d'où $\mathcal{P}(2)$ vraie.

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Par définition,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$T_{n+2}(1) = 2 \times 1 \times T_{n+1}(1) - T_n(1) = 2 - 1 = 1$$

D'où $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{T_n(1) = 1}$.

(b) On utilise ensuite la question 3.(a) qui assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{T_n(-1) = (-1)^n}$.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) = 2xu_{n+1} - u_n.$$

(b) On peut proposer le script suivant :

```python
def tchebychev(n,x):
    R=1
    T=x
    for k in range(n-2):
        S=R
        R=T
        T=2*x*T-S
    return T
```

(c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$. La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $(E) : r^2 - 2xr + 1 = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$.
Son discriminant vaut : $\Delta = 4x^2 - 4 = 4\left(x^2-1\right) > 0$ car $|x| > 1$. On en déduit que (E) admet deux solutions $r_1 = \dfrac{2x - \sqrt{4\left(x^2-1\right)}}{2} = x - \sqrt{x^2-1}$ et $r_2 = x + \sqrt{x^2-1}$.
Donc il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \mu\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + \mu\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) & = x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \lambda + \mu & = 1 \\ -2\mu + 1 & = 0 \end{array}\right. \quad \text{car } \sqrt{x^2-1} \neq 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \mu = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = T_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)}$.

7. (a) On a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

(b) En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

8. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ » est vraie.

Initialisation pour $n = 0$, $T_0 = 1$, donc $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$, d'où $\mathcal{P}(0)$ vraie.
Pour $n = 1, T_1 = x$, donc $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$, d'où $\mathcal{P}(1)$ vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'après la question précédente} \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.

Conclusion pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

(b) On a montré à la question 8.(a) que $T_n(x)$ vérifie bien : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Supposons qu'il existe un polynôme $S_n(x)$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $S_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
Posons alors $R_n(x) = S_n(x) - T_n(x)$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_n(\cos(\theta)) = S_n(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$, donc $R_n(x)$ admet une infinité de racines (tous les réels de $[-1, 1]$), donc $R_n(x) = 0$, donc $S_n(x) = T_n(x)$, d'où l'unicité .