Concours Blanc n° 1

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé de deux exercices et de trois problèmes. Bon courage !

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x)$ et la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x\mathrm{e}^x-1$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   (b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0,+\infty[$. En déduire le tableau des variations de g.
   On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

   (c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$. Vérifier que $\alpha\in[0,1]$.

   (d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. (a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif :

   $$f'(x)=\frac{g(x)}{x}$$

   En déduire le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$.

   (c) Justifier que le réel α vérifie $\dfrac{1}{\alpha}=\mathrm{e}^\alpha$. En déduire que $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$.

3. (a) Calculer pour tout réel $x\in]0,+\infty[$, $f''(x)$.

   (b) Étudier la convexité de f sur $]0,+\infty[$.

4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.
   On donne $\alpha\simeq 0,57$ et $f(\alpha)\simeq 2,33$.

5. (a) Recopier et compléter la fonction suivante permettant définir la fonction f.

```
def f(.............) :
    ..................
    return ...........
```

   (b) Recopier et compléter les instructions suivantes permettant de tracer la courbe la fonction f sur $]0,2]$.

```
x=np.arange(.................)
plt.plot(...........................)
```


Exercice 2

On note E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que $(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(x^2\right) = f(x)$.

1. Soit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante. Montrer que $f \in E$.
2. Soit à présent une application f de E.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Soit $x \in [0, 1[$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$.
      ii. En déduire que $f(x) = f(0)$.
   (c) Soit maintenant $x \in [1, +\infty[$.
      i. Montrer que $f(\sqrt{x}) = f(x)$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$.
      iii. En déduire que $f(x) = f(1)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Montrer alors que f est constante.
3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?

Problème 1

Soit un entier $n \geqslant 3$ et soit f_n l'application définie par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n - nx + 1 \end{array} \right.$$

1. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction g_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g_n(x) = x^{n-1} - 1.$$

   (a) Etudier les variations de g_n sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de la fonction g_n sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer (soigneusement) que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
4. Étude de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$
   (a) Soit $n \geqslant 3$. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et déterminer le signe de cette expression sur $]0, 1[$.
   (b) En appliquant le résultat de la question précédente au réel α_n, déterminer le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$.
   (c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n^n = 0$.
   (e) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ vaut 0 .
   (f) Montrer que $n\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
5. Étude de suite $(\beta_n)_{n \geqslant 3}$
   (a) Soit $n \geqslant 3$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - n = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k}$$

   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 3, \ f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.
   (c) Montrer alors que pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$1 \leqslant \beta_n \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

   (d) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n \geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

Problème 2 *D'après HEC voie T*

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 en fonction de A et I.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_n A + v_n I$.
   On vérifiera, pour tout entier naturel n, les relations : $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont positifs.
3. (a) Établir, pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (b) **Python**
      i. Recopier et compléter la fonction suivante qui, étant donné un entier n, renvoie un vecteur de taille n contenant toutes les valeurs de $u_0, \ldots, u_n$.

```
def suite_pb2(.......):
    u=...............
    u[0]=.............
    u[1]=.............
    for k ................ :
        .............................................
    return ................
```

      ii. Quelles instructions faut-il écrire pour tracer les 30 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Déduire la question 3.(a) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (e) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , la relation :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

   (f) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , les relations :

$$\begin{cases} u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \\ u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1} \end{cases}$$

   (g) Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, on pose : $d(M) = ad - bc$.
      i. Soient a, b, c, d, x, y, z, t huit réels quelconques. On considère les deux matrices : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
      Calculer le produit MN ainsi que $d(MN)$.
      ii. Montrer que $d(MN) = d(M) \times d(N)$.
      iii. Établir, pour toute matrice M carrée d'ordre 2 et pour tout entier naturel n, la formule :

$$d(M^n) = [d(M)]^n.$$

   (h) En utilisant le résultat précédent, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation :

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n.$$

Tourner la page.

Problème 3 *Etude d'une suite de polynômes*

Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes à coefficients réels définie par

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = x + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 16P_{n+2}(x) = 8(2x+1)P_{n+1}(x) - P_n(x)$$

1. (a) Déterminer P_2 et P_3.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est de degré n et de coefficient dominant égal à 1.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(-1-x) = (-1)^n P_n(x)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si α est racine de P_n alors $-1-\alpha$ est aussi racine de P_n.
   (c) En déduire aussi une racine commune à tous les polynômes P_{2n+1}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f_n(t) = P_n\left(-(\cos(t))^2\right)$.

3. (a) Vérifier que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $2\cos(a)\cos(b) - \cos(a-b) = \cos(a+b)$.
   (b) Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cos(2nt)$$

   (c) En déduire $P_n(0)$ et $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Résoudre l'équation $\cos(2nt) = 0$ d'inconnue $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Montrer que l'application $t \longmapsto \cos(t)^2$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire que P_n a n racines distinctes puis factoriser P_n.
   (d) Montrer finalement que

   $$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2 = \frac{1}{2^{2n-1}}$$