Concours Blanc n° 1

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez, soulignez ou surlignez **en couleurs** vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé d'un exercice et de trois problèmes. Bon courage !

Exercice 1

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où A est la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On définit de plus la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Question préliminaire**

   Soient α, β et γ trois réels distincts. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

   On rappelle que deux matrices A et B commutent entre elles si et seulement si $AB = BA$.

2. (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) On pose alors $D = P^{-1}AP$. Calculer la matrice D.

3. **Analyse** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice solution de l'équation c'est-à-dire vérifiant $M^3 = A$.

   (a) Montrer que A et M commutent.

   (b) En déduire que $P^{-1}MP$ et D commutent.

   (c) Justifier alors que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale. On note alors Δ cette matrice diagonale.

   (d) Vérifier que $\Delta^3 = D$ et déterminer explicitement Δ.

   (e) Déterminer alors M.

4. **Synthèse** Conclure.

Problème 1

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. **Étude du signe de g.**
   (a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera.
   (c) Dresser le tableau de variations de g.
   (d) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. **Étude asymptotique de f.**
   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$et quand $x \to +\infty$.
   (b) On note $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Calculer a et b.
   (c) Donner l'équation de l'asymptote $(\mathcal{A})$ de $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $\mathcal{C}_f$.
3. **Représentation graphique de f.**
   (a) Démontrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+et en $+\infty$.
   (c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathcal{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote $(\mathcal{A})$.
   (d) Recopier et compléter le script suivant pour tracer la courbe de f sur $[0.1, 10]$ à l'aide de Python :

```
def f(......):
    y = .................
    return .........

import matplotlib.pyplot as plt
abscisse =................................
plt.plot(......................)
```

4. **Étude d'une équation.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation
   $$(\mathcal{E}_n) : \quad f(x) = 2n.$$
   (a) Prouver que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution (que l'on ne cherchera pas à calculer). On note x_n cette solution.
   (b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n), f(1)$ et $f(n)$. En déduire l'encadrement :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$
   (c) Justifier que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$$
   (d) Prouver que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$
   (e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Problème 2

Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise les résultats de la partie II et les notations de la partie I.

Partie I : étude d'une suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Vérifier que la suite (H_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) Justifier que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
   On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 1.(b)
   (e) i. Ecrire une fonction qui, étant donné un entier n, permet de calculer H_n.
   ii. Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de l'entier n pour lequel $H_n \geqslant 10^5$.

```
def rang():
    H = ........
    n = ..........
    while .................................. :
        n = ......................
        H = ...........................
    return .................
```

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Justifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
   (c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   En déduire qu'elles convergent vers une même limite notée γ.
3. *Une application* : on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_{2n} - H_n$.
   (b) Exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n en fonction de termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et d'une constante.
   (c) En déduire que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Partie II : formule d'inversion de Pascal

1. Soient i, k et n trois entiers naturels tels que $i \leqslant k \leqslant n$. Prouver que $\dbinom{n}{k}\dbinom{k}{i} = \dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{n-k}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j}.$$
   (b) *On rappelle que* $0^n = 0$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que* $0^0 = 1$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.
   Ce résultat est connu sous le nom de formule d'inversion de Pascal : il dit essentiellement que l'on peut retrouver la suite (u_n) *à partir de la suite* (v_n).

Partie III : une application

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-(1-x)^n}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k}x^k$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} - H_n$.

   (c) Conclure que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. En utilisant la formule d'inversion de Pascal, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}H_k$

Problème 3

On définit une suite de polynômes $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

1. Calculer explicitement $T_2(x)$, $T_3(x)$ et $T_4(x)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients entiers.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

   (b) Que peut-on en déduire quant à la parité de la fonction polynomiale T_n ?
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de $T_n(x)$ est 2^{n-1}.
5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(1) = 1$.

   (b) En déduire la valeur de $T_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n(x)$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

   (b) Recopier et compléter la fonction suivante qui prend en entrée un entier n et un réel x et qui renvoie la valeur de $T_n(x)$.

```
def tchebychev (...........):
    R = ...........
    T = ...............
    for k in range(............):
        S = ............
        R = ...............
        T = ................
    return ...............
```

   (c) Déduire de la question 6.(a) que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1], \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

7. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Rappeler les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ en fonction de $\cos(a), \cos(b), \sin(a)$ et $\sin(b)$.

   (b) En déduire une formule pour $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
8. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $T_n(x)$ est l'unique polynôme $P(x)$ vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$