Corrigé CB n° 1

Exercice 1

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$.
Autrement dit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

(b) Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par produit, la fonction $x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g aussi et en particulier, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout x dans $\mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $x + 1 > 0$ et $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$.
Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $g(0) = -1$, d'où le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$			$+$		
Variations de g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : On anticipe sur la question suivante en plaçant le réel α.

(c) La fonction g est dérivable donc continue sur $[0;+\infty[$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ d'après ce qui précède donc elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $g([0;+\infty[) = [-1;+\infty[$ d'après le théorème de la bijection. Or, $0 \in [-1;+\infty[$, donc 0 admet un unique antécédent par la fonction g *i.e* l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$.
$g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = e - 1 > 0$ puisque $e > 2$ donc

$$g(0) < 0 < g(1) \qquad \textit{i.e} \qquad g(0) < g(\alpha) < g(1).$$

Or, la fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $0 < \alpha < 1$. En particulier : $\boxed{\alpha \in [0;1]}$.

(d) Puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que $g(\alpha) = 0$, le signe de $g(x)$ est clairement donné par le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - \ln(x)) = +\infty$.
Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.
Pour lever la forme indéterminée dans la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on écrit astucieusement que :

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Par croissance comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on obtient finalement par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ *i.e* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction usuelle) donc en particulier sur $]0;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (fonction usuelle) donc par différence, la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x dans $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, qui a été déterminé à la question **1.d)**, d'où le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

(c) Par définition, α est l'unique réel satisfaisant $g(\alpha) = 0$. Donc, $\alpha e^\alpha - 1 = 0$. Par suite, on a $\alpha e^\alpha = 1$ et puisqu'on a justifié à la question **1.c)** que α est non nul, on peut en conclure que le réel α vérifie :

$$\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$$

Par conséquent :

$$f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \ln(e^\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha$$

En conclusion :

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

3. (a) Pour tout $x > 0$, on a d'après la question **2.b)** :

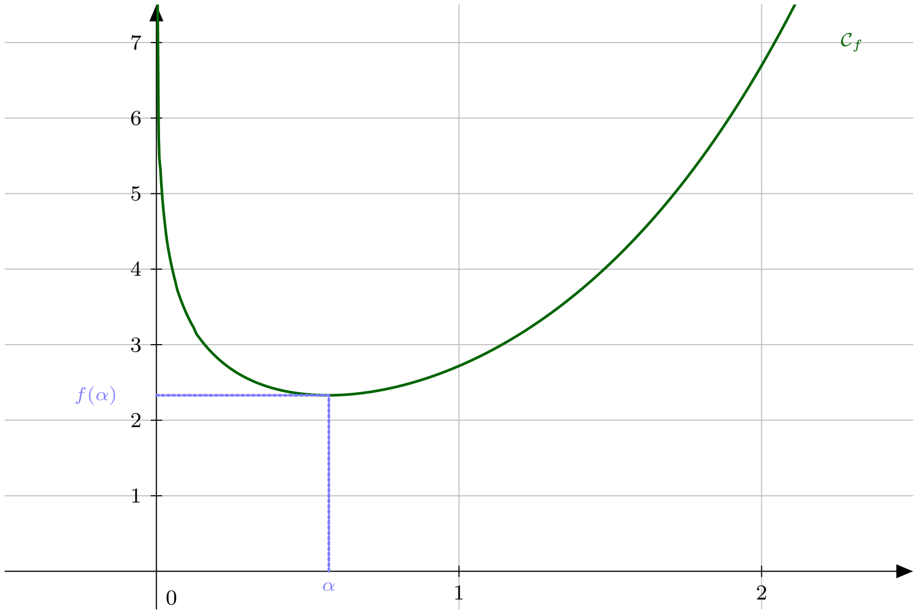
$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc par différence, la fonction f' est également dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a bien :

$$\forall x > 0 \qquad f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

(b) Pour tout $x > 0$, $e^x > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$ donc $f''(x) > 0$ ce qui prouve que la fonction f est $\boxed{\text{convexe}}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$:



5. (a) On peut proposer la fonction suivante :

```python
def f(x):
    y=np.exp(x)-np.log(x)
    return y
```

(b) On peut proposer les instructions suivantes :

```python
x=np.arange(0.0001, 2, 0.00001)
plt.plot(x,f(x))
```

Exercice 2

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} - u_{n+2} \\ &= 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n - u_{n+2} \\ &= 3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_{n+1} + 2u_n \\ &= 3\left(u_{n+2} - u_{n+1}\right) - 2\left(u_{n+1} - u_n\right) \\ &= 3v_{n+1} - 2v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est $\boxed{\text{récurrente linéraire d'ordre 2}}$.

(b) L'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ses racines sont 1 et 2 . Ainsi il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda \times 2^n + \mu \times 1^n = \lambda \cdot 2^n + \mu.$$

Comme $v_0 = u_1 - u_0 = 0$ et $v_1 = u_2 - u_1 = 1$ alors on en déduit le système suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. On obtient donc bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 2^n - 1}$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors (en reconnaissant une somme télescopique)

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = u_n - u_0 + u_0 = u_n.$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a donc

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^k - 1\right) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 1 = \frac{1-2^n}{1-2} - n + 1 = 2^n - n.$$

Ainsi pour $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n - n$. Or $u_0 = 1 = 2^0 - 0$ donc l'expression précédente est aussi valable pour $n = 0$.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 2^n - n}$.

4. (a) On peut compléter le programme comme suit :

```
def suite_exo2(n):
    u=np.zeros(n)
    u[0]=1
    u[1]=1
    u[2]=2
    for k in range(n-3) :
        u[k+3]=4*u[k+2]-5*u[k+1]+2*u[k]
    return u
```

(b) On peut écrire :

```
plt.plot(suite_exo2(30),'+')
```

Exercice 3

1. Soit $c \in \mathbb{R}$, on considère f la fonction constante égale à c. f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est continue en 0 et en 1 . Soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad f\left(x^2\right) = c = f(x)$.
En conclusion, les fonctions constantes sont $\boxed{\text{solutions du problème posé}}$.

2. Soit $f \in E$.
   (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, puisque f vérifie $(\star)$, on a :

$$f(-x) = f\left((-x)^2\right) = f\left(x^2\right) = f(x)$$

   Ainsi la fonction f est $\boxed{\text{paire}}$.

   (b) Soit $x \in [0, 1[$.
      i. Raisonnons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$ ».
      Initialisation Pour $n = 0$, on a $f\left(x^{2^0}\right) = f\left(x^1\right) = f(x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
      Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
      On a alors

$$\begin{aligned} f\left(x^{2^{n+1}}\right) &= f\left(\left(x^{2^n}\right)^2\right) = f\left(x^{2^n}\right) \quad \text{d'après la relation } (\star) \\ &= f(x) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

      Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
      Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$.

      ii. On a $x^{2^n} = \exp\left(2^n \ln(x)\right)$. Comme $x \in [0, 1\,[$, on a $\ln(x) < 0$ et comme $2^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a, par composition : $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{2^n} = 0$.
      Comme f est continue en 0, on peut alors affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(x^{2^n}\right) = f(0).$$

      Or, d'après la question précédente, $f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = f(x)$, d'après l'unicité de la limite, on a $\boxed{f(x) = f(0)}$.

(c) Soit $x \in [1, +\infty[$.

i. On a $f(\sqrt{x}) = f\left((\sqrt{x})^2\right) = f(x)$ d'après $(\star)$. En conclusion, $\boxed{f(\sqrt{x}) = f(x)}$.

ii. Raisonnons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a $f\left(x^{\frac{1}{2^0}}\right) = f\left(x^1\right) = f(x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a alors

$$\begin{aligned} f\left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) &= f\left(x^{\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}}\right) = f\left(\sqrt{x^{\frac{1}{2^n}}}\right) \\ &= f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= f(x) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$.

iii. On a $x^{\frac{1}{2^n}} = \exp\left(\frac{1}{2^n}\ln(x)\right)$. On a alors $\frac{1}{2^n} = 2^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme $x \geqslant 1$, $\ln(x) \geqslant 0$ et donc par opérations puis composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$.
Puisque f est continue en 1 , on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = f(x)$, on conclut, par unicité de la limite que $\boxed{f(x) = f(1)}$.

(d) On a démontré en question 2.(b) que : $\forall x \in [0, 1[, f(x) = f(0)$ et en question 2.(c) que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = f(1)$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Or la fonction f est continue en 1 par hypothèse donc $f(0) = f(1)$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = f(1)$. Donc f est $\boxed{\text{constante sur } \mathbb{R}_+}$.

(e) La fonction f est paire d'après la question 2.(a) donc $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = f(-x) = f(1)$ d'après la question précédente et car $-x \in \mathbb{R}_+$.
En conclusion, la fonction f est $\boxed{\text{constante sur } \mathbb{R}}$.

3. Dans cet exercice nous avons raisonné par analyse-synthèse. Dans la question 2, nous avons démontré que les seules fonction pouvant être solutions du problème étaient les fonctions constantes (analyse). Dans la question 1 , nous avons montré que les fonctions constantes étaient bien solutions du problème (synthèse).
Conclusion : Les seules solutions du problèmes sont les fonctions constantes.

Problème 1

1. (a) La fonction g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme fonction polynomiale. Pour tout $x \geqslant 0$, $g_n'(x) = (n-1)x^{n-2}$.
Ainsi pour tout $x > 0$, $g_n'(x) > 0$ et $g_n'(0) = 0$ donc la fonction g_n est $\boxed{\text{strictement croissante sur } [0, +\infty[}$.

(b) On remarque que $g_n(1) = 0$ et comme la fonction g_n est strictement croissante, on en déduit que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g_n(x) = x^{n-1} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 1, \quad g_n(x) = x^{n-1} - 1 \geqslant 0.$$

La fonction g_n est donc $\boxed{\text{négative sur }]0, 1[\text{ et positive sur }]1, +\infty[}$.

2. La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ car polynomiale. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n\left(x^{n-1} - 1\right) = ng_n(x)$$

D'après le signe de la fonction g_n établi précédemment, on en déduit que la fonction f_n est $\boxed{\text{strictement décroissante sur }]0, 1[}$ et $\boxed{\text{strictement croissante sur }]1 + \infty[}$.

3. On a d'une part :
   la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$. De plus, $f_n(0)=1$ et $f_n(1)=2-n<0$ car $n \geqslant 3$.
   D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n admet donc un unique zéro α_n sur $]0,1[$.
   On a d'autre part :
   la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, $f_n(1)<0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)=+\infty$.
   D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n admet donc un unique zéro β_n sur $]1,+\infty\,[$.
   En conclusion, l'équation $f_n(x)=0$ admet deux solutions $\boxed{\alpha_n \text{ et } \beta_n \text{ telle que } 0<\alpha_n<1<\beta_n}$.
4. Etude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Soit $n \geqslant 3$ et soit $x \in]0,1[$,
   $$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{n+1}-(n+1)x-x^n+nx=x^n(x-1)-x.$$
   Or $x \in]0,1[$ donc $x^n(x-1)<0$ et $-x<0$ donc $\boxed{f_{n+1}(x)-f_n(x)<0}$.
   (b) Soit $n \geqslant 3$. En appliquant le résultat de la question précédente à $\alpha_n \in]\,0,1[$, on obtient
   $$f_{n+1}(\alpha_n)-f_n(\alpha_n)=f_{n+1}(\alpha_n)<0$$
   On a donc $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n)<0}$.
   (c) Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$ donc
   $$f_{n+1}(\alpha_n)<f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$
   Comme, la fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0,1[$, on en déduit que
   $$\alpha_n>\alpha_{n+1}.$$
   La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est donc $\boxed{\text{décroissante}}$.
   (d) Comme pour tout $n \geqslant 3$, $\alpha_n \in]0,1[$, la suite (α_n) est minorée par 0. Etant également décroissante, d'après le théorème de convergence monotone, elle $\boxed{\text{converge vers un réel } \ell_1 \in [0,1]}$.
   En outre, par décroissance de la suite, pour tout $n \geqslant 3$,
   $$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_3 < 1.$$
   Donc, par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $n \geqslant 3$,
   $$0 \leqslant (\alpha_n)^n \leqslant {\alpha_3}^n.$$
   Et comme $\alpha_3 \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_3^n=0$, on conclut ensuite, par théorème d'encadrement, que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} {\alpha_n}^n=0}$.
   (e) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1>0$. Alors, par produit, $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or pour tout $n \geqslant 3$,
   $$n\alpha_n=\alpha_n^n+1$$
   En utilisant la limite montrée à la question précédente et par somme, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n+1=1$.
   Comme $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, c'est absurde.
   Par conséquent, La suite $(\alpha_n)_n$ $\boxed{\text{converge vers } 0}$.
   (f) D'après ce qui précède, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n=1}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} {\alpha_n}^n=0$.
5. Etude de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Soit $n \geqslant 3$.
   $$\begin{aligned} f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)-n &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n-n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)+1-n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{(\sqrt{n})^k}-n-2\sqrt{n}+1-n \\ &= 1+n\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n}-2n-2\sqrt{n}+1+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} \\ &= 2+2\sqrt{n}+2n-2-2n-2\sqrt{n}+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} \\ &= \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} \end{aligned}$$

(b) Comme $n \geqslant 3$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} > 0$ et donc $f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) - n > 0$, on en déduit donc que $\boxed{f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n}$.

(c) Soit $n \geqslant 3$, on a $\beta_n \in]1, +\infty[$ et

$$f_n(1) < f_n(\beta_n) = 0 \leqslant n \leqslant f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

La fonction f_n étant strictement croissante sur $]1, +\infty[$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 3, \quad 1 \leqslant \beta_n \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

(d) Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} = 1$, par théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (β_n) $\boxed{\text{converge vers 1}}$.

Problème 2 *D'après HEC voie T*

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A + I.$$

(b) Montrons ce résultat par récurrence. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I$ ».

Initialisation $(n = 0)$ Par convention $A^0 = I$ donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ conviennent. On a alors $A^0 = u_0 A + v_0 I$ et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (u_n A + v_n I)A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= u_n A^2 + v_n A \\ &= u_n(A + I) + v_n A \quad \text{car } A^2 = A + I \\ &= (u_n + v_n)A + u_n I. \end{aligned}$$

Posons $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = v_n$. Le couple $(u_{n+1}, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ est bien défini car le couple (u_n, v_n) l'est par hypothèse de récurrence et on a $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I$. Autrement dit, il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = v_n$ telles que $A^n = u_n A + v_n I$.

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ ».

Initialisation $(n = 0)$ $u_0 = 0 \geqslant 0$ et $v_0 = 1 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $u_{n+1} = u_n + v_n$, or $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence donc $u_{n+1} \geqslant 0$. De même, $v_{n+1} = u_n \geqslant 0$. Ainsi la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$.

3. (a) On a $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1}$, or $v_{n+1} = u_n$ donc $\boxed{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n}$.

(b) D'après l'égalité précédente, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$, or $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 3. Donc $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant 0$ soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{croissante}}$.

(c) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $+\infty$. Comme elle est croissante, cela signifie qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Comme u_n est définie par la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, on obtient par passage à la limite $\ell = \ell + \ell$ soit $\ell = 0$. Or $u_1 = 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\ell = 0$ est absurde. Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

(d) On a montré à la question 1.(b) que $A^n = u_n A + v_n I$ soit

$$A^n = u_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n & u_n \\ u_n & u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Or $u_n + v_n = u_{n+1}$ et $v_{n+1} = u_n$ d'où $v_n = u_{n-1}$, ainsi $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}}$.

(e) D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} u_{2n-1} & u_{2n} \\ u_{2n} & u_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Or $A^{2n} = (A^n)^2 = \left(\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} u_{n-1}^2 + u_n^2 & u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} \\ u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} & u_n^2 + u_{n+1}^2 \end{pmatrix}$. Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \\ u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1} \end{cases}$$

(f) i. On a $MN = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$. On en déduit

$$d(MN) = (ax+bz)(cy+dt) - (cx+dz)(ay+bt) = ad(xt-yz) + bc(yz-xt).$$

ii. Continuons de simplifier $d(MN)$, on factorise par $xt - yz$, on obtient :

$$d(MN) = (ad-bc)(xt-yz) = d(M)d(N).$$

iii. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $d(M^n) = [d(M)]^n$ ».

Initialisation $(n = 0)$ $d(M^0) = d(I) = 1$ et $[d(M)]^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a $M^{n+1} = M^n M$ donc d'après la question précédente et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$d(M^{n+1}) = d(M^n)d(M) = [d(M)]^n \times d(M) = [d(M)]^{n+1}$$

Ainsi la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(M^n) = [d(M)]^n$.

(g) On a $d(A^n) = u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2$ et $d(A) = -1$ donc d'après la question précédente, on a $\boxed{u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n}$.

Problème 3 *Etude d'une suite de polynômes*

1. (a) D'après l'énoncé, on a

$$16P_2(x) = 8(2x+1)P_1(x) - P_0(x) = 8(2x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2 = 16x^2 + 16x + 2$$

ainsi, $\boxed{P_2(x) = x^2 + x + \frac{1}{8}}$. Puis,

$$16P_3(x) = 9(2x+1)\left(x^2 + x + \frac{1}{8}\right) - \left(x + 1\frac{1}{2}\right) = 16x^3 + 24x^2 + 9x + \frac{1}{2}$$

donc, $\boxed{P_3(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}x + \frac{1}{32}}$.

(b) Raisonnons par récurrence double.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $deg(P_n) = n$ et son coefficient dominant vaut 1 ».

Initialisation $(n = 1)$ et $(n = 2)$

On a $P_1(x) = x + \frac{1}{2}$ donc $deg(P_1) = 1$ et son coefficient dominant vaut 1.

On a $P_2(x) = x^2 + x + \frac{1}{8}$ donc $deg(P_2) = 1$ et son coefficient dominant vaut 1.

Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. D'après la définition de la suite, on a :

$$P_{n+2}(x) = \frac{1}{16}\left(8(2x+1)P_{n+1}(x) - P_n(x)\right) = \frac{1}{2}(2x+1)P_{n+1}(x) - \frac{1}{16}P_n(x).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $deg(P_{n+1}(x)) = n+1$ donc par produit, $deg\left(\frac{1}{2}(2x+\ 1)\ P_{n+1}(x)\right) = n+2$. Et par hypothèse de récurrence encore, $deg\left(P_n(x)\right) = n$. Ainsi, $P_{n+2}(x)$ est la somme de deux polynômes de degrés distincts. Son degré est donc le maximum des degrés des deux polynômes sommés, à savoir $n+2$. Son coefficient dominant, pour la même raison, est le coefficient dominant de $\frac{1}{2}(2x+1)P_{n+1}(x)$, à savoir $\frac{1}{2} \times 2 \times$ coef dominant de $P_{n+1}(x) = 1$ par hypothèse de récurrence. Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à savoir $\boxed{P_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant égal à } 1}$.

2. (a) Raisonnons de nouveau par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $P_n(-1-x) = (-1)^n P_n(x)$».

Initialisation $(n = 0)$ et $(n = 1)$

On a $P_0(-1-x) = 2$ et $(-1)^0 P_0(x) = 2$.

On a $P_1(-1-x) = -1-x+\frac{1}{2} = -x-\frac{1}{2}$ et $(-1)^1 P_1(x) = -P_1(x) = -x-\frac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. D'après la définition de la suite, on a :

$$\begin{aligned}
16P_{n+2}(-1-x) &= 8(2(-x-1)+1)P_{n+1}(-1-x) - P_n(-1-x)\\
&= 8(-2x-1)(-1)^{n+1}P_{n+1}(x) - (-1)^n P_n(x) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= (-1)^{n+2} 8(2x+1)P_{n+1}(x) - (-1)^{n+2}P_n(x)\\
&= (-1)^{n+2} 16 P_{n+2}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir $\boxed{P_n(-1-x) = (-1)^n P_n(x)}$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons α racine de $P_n(x)$. On a donc $P_n(\alpha) = 0$ et donc d'après la question précédente,

$$0 = (-1)^n P_n(\alpha) = P_n(-1-\alpha)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \alpha \text{ est racine de } P_n(x)\text{, alors } -1-\alpha \text{ l'est aussi.}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Évaluons la relation trouvée à la question 2.a. en $-\frac{1}{2}$, il vient :

$$P_{2n+1}\left(-1+\frac{1}{2}\right) = (-1)^{2n+1} P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ i. e } P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

et donc $P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Conclusion : $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est racine de } P_{2n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

Remarque : Pour avoir l'idée de considérer $\alpha = -\frac{1}{2}$, il suffit de chercher la racine de $P_1(x)$!

3. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. D'après le cours de trigonométrie, on a
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
Ainsi, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b) - \cos(a-b)}$

(b) Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Raisonnons par récurrence double.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ${}^n f_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2nt)^n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $f_0(t) = 2$ et $\frac{(-1)^0}{2^{2\times 0-1}}\cos(2\times 0\times t) = 2$. Puis, pour $n = 1$, on a $f_1(t) = P_1\left(-\cos(t)^2\right) = -\cos(t)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\cos^2(t)\right) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$ et $\frac{(-1)^1}{2^{2-1}}\cos(2t) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies. D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
16f_{n+2}(t) &= 16P_{n+2}\left(-\cos(t)^2\right)\\
&= 8\left(-2\cos(t)^2+1\right)P_{n+1}\left(-\cos(t)^2\right) - P_n\left(-\cos(t)^2\right)\\
&= 8\left(-2\cos(t)^2+1\right)f_{n+1}(t) - f_n(t)\\
&= 8\left(-2\cos(t)^2+1\right)\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)-1}}\cos(2(n+1)t) - \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2nt)\\
&= 8(-\cos(2t))\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\cos(2(n+1)t) - \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2nt)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les hypothèses de récurrence. Puis, en utilisant que $8 = 2\times 2^2$ et en factorisant, puis en utilisant la question précédente avec $a = 2(n+1)t$ et $b = 2t$, on trouve :

$$\begin{aligned}
16f_{n+2}(t) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}(2\cos(2t)\cos(2(n+1)t) - \cos(2nt))\\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos((2(n+1)+2)t)\\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{2^{2n-1}}\cos(2(n+2)t)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que n et $n+2$ ont la même parité .
On a donc montré que

$$f_{n+2}(t) = \frac{1}{16}\frac{(-1)^{n+2}}{2^{2n-1}}\cos(2(n+2)t) = \frac{1}{2^4}\frac{(-1)^{n+2}}{2^{2n-1}}\cos(2(n+2)t) = \frac{(-1)^{n+2}}{2^{2(n+2)-1}}\cos(2(n+2)t)$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2nt).}$

(c) Soit $\in \mathbb{N}$. On a, $P_n(0) = P_n\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$P_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}(-1)^n = \frac{(-1)^{2n}}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

où l'on a utilisé que $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = (-1)$ et donc $\cos(n\pi) = (-1)^n$. De même, $P_n(-1) = P_n\left(-\cos(0)^2\right)$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$P_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(0) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n(0) = \frac{1}{2^{2n-1}} \text{ et } P_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}\cos(2nt) = 0 &\iff 2nt = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\iff t = \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi(2k+1)}{4n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\end{aligned}$$

car $\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi(2k+1)}{4n}$ reste dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $0 \leqslant \frac{2k+1}{2n} \leqslant 1$ i.e $-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \frac{1}{2}$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les solutions sont les } t_k = \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi(2k+1)}{4n}, \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$

(b) On pose $g : t \mapsto \cos(t)^2$. Cette fonction est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$g'(t) = -2\cos(t)\sin(t) \leqslant 0$$

Comme g' ne s'annule qu'en 0 et $\frac{\pi}{2}$ alors g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) La question 4.a nous a permis de trouver $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, $, n éléments de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos(2nt) = 0$, c'est à dire vérifiant $f_n(t_k) = P_n\left(-\cos(t_k)^2\right) = 0$. Nous avons ainsi exhibé des racines de P_n, à savoir les $-\cos(t_k)^2$. Puisque les t_k sont deux à deux distincts et que la fonction g de la question précédente est strictement décroissante (elle est donc injective), les $-\cos(t_k)^2$ sont également deux à deux distincts. Finalement, nous avons donc trouvé, n racines distinctes de $P_n(x)$. Ce polynôme étant de degré n d'après la question 1.b, nous avons trouvé toutes ses racines (et elles sont toutes simples !). D'après le cours, on a alors :

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \left(-\cos(t_k)^2\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x + \cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)^2\right).$$

Conclusion : $\boxed{P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x + \cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)^2\right).}$

(d) Évaluons en 0 l'égalité de la question précédente, il vient :

$$P_n(0) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)^2\right)$$

On peut alors conclure en utilisant la question 3.(c).
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)^2\right) = \frac{1}{2^{2n-1}}.}$