Correction partielle du TD 9 : Ensembles et applications

Table des matières

1 Exercice 2 — 2
2 Exercice 3 — 2
3 Exercice 6 — 2
4 Exercice 7 — 2
5 Exercice 8 — 2
6 Exercice 9 — 3
7 Exercice 10 — 3
8 Exercice 11 — 3
9 Exercice 15 — 4
10 Exercice 16 — 4
11 Exercice 17 — 5
12 Exercice 19 — 5
13 Exercice 20 — 5
14 Exercice 21 — 6
15 Exercice 22 — 6
16 Exercice 23 — 7

1 Exercice 2

1. $A \cap B = \{2\}$; $A \cup B = \{1,2,4\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3\}$, $A \cup \overline{B} = \{1,2,3\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4\}$.
2. $A \cap B = [2;3]$; $A \cup B =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, $A \cup \overline{B} =]-\infty;3] = A$, $A \setminus B =]-\infty;2[$, $B \setminus A =]3;+\infty[$.
3. $A \cap B = \mathbb{N}^*$; $A \cup B = \mathbb{N}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $A \cup \overline{B} = \mathbb{N} \cup]-\infty;0]$, $A \setminus B = \{0\}$, $B \setminus A =]0;+\infty[\setminus \mathbb{N}^*$.

2 Exercice 3

1. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{3,4,5\}$
2. $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{2,3,4,5,7\}$
3. $(\overline{A} \cap D) \cap (\overline{B \cup C}) = \emptyset$

3 Exercice 6

On a

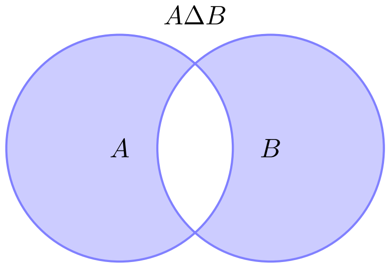
$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$$
$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\Big\}$$

4 Exercice 7

1. On a $A \cap B \subset A$, donc $A \cup (A \cap B) = A$ d'après le cours.
2. On a $A \subset A \cup B$, donc $A \cap (A \cup B) = A$ d'après le cours.

5 Exercice 8

1. Les éléments de $A\Delta B$ correspond à l'ensemble des éléments qui sont soit dans A, soit dans B, mais pas dans les deux. Sur un diagramme de Venn, cela donne :



2. On procède par double inclusion.
   - $A\Delta B \subset (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$: soit $x \in A\Delta B$. Alors, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Donc, $x \in A$ ou $x \in B$ et $x \notin A \cap B$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$ car sinon on aurait $x \in A \cap B$ ce qui est exclus. Donc, $x \in A \cap \overline{B}$. De même, si $x \in B$, alors $x \notin A$ donc, $x \in B \cap \overline{A}$. Bref, $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. Ce qui montre la première inclusion.
   - $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \subset A\Delta B$: soit $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. Alors $x \in A \cap \overline{B}$ ou $x \in B \cap \overline{A}$. Si $x \in A \cap \overline{B}$, alors $x \in A \cup B$ (puisque $x \in A$) mais $x \notin A \cap B$ (puisque $x \notin B$). Donc, $x \in A\Delta B$. De même, si $x \in B \cap \overline{A}$ alors $x \in A\Delta B$. Ce qui montre la deuxième inclusion.
3. On a :

$$\bullet\ A\Delta A = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$
$$\bullet\ A\Delta \emptyset = (A \cap A) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A \cup \emptyset = A$$
$$\bullet\ A\Delta E = (A \cap \emptyset) \cup (E \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$$
$$\bullet\ A\Delta \overline{A} = (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = A \cup \overline{A} = E$$

4. D'une part, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = \big((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\big) \cap C = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{A} \cap C)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(A\cap C)\Delta(B\cap C) &= (A\cap C\cap\overline{B\cap C})\cup(B\cap C\cap\overline{A\cap C})\\ &= \Big(A\cap C\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\Big)\cup\Big(B\cap C\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\Big)\\ &= \Big((A\cap C\cap\overline{B})\cup(A\cap C\cap\overline{C})\Big)\cup\Big((B\cap C\cap\overline{A})\cup(B\cap C\cap\overline{C})\Big)\\ &= \Big((A\cap B\cap\overline{C})\cup\emptyset\Big)\cup\Big((B\cap\overline{A}\cap C)\cup\emptyset\Big)\\ &= (A\cap\overline{B}\cap C)\cup(B\cap\overline{A}\cap C) = (A\Delta B)\cap C\end{aligned}$$

Ce qui démontre bien l'égalité demandée.

6 Exercice 9

1. On procède par équivalence. Soit $x\in E$. On a :

$$\begin{aligned}x\in(A\cap B)\setminus C &\iff x\in A\cap B \text{ et } x\notin C\\ &\iff x\in A \text{ et } x\in B \text{ et } x\notin C\\ &\iff (x\in A \text{ et } x\notin C)\ \text{ et }\ (x\in B \text{ et } x\notin C)\\ &\iff x\in A\setminus C \text{ et } x\in B\setminus C\\ &\iff x\in(A\setminus C)\cap(B\setminus C)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

2. On procède de nouveau par équivalence. Soit $x\in E$. On a :

$$\begin{aligned}x\in(A\cup B)\setminus C &\iff x\in A\cup B \text{ et } x\notin C\\ &\iff x\in A \text{ ou } x\in B \text{ et } x\notin C\\ &\iff (x\in A \text{ et } x\notin C)\ \text{ ou }\ (x\in B \text{ et } x\notin C)\\ &\iff x\in A\setminus C \text{ ou } x\in B\setminus C\\ &\iff x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

7 Exercice 10

On procède par double inclusion.

- $A\subset B$: soit $(x,y)\in A$. Alors on a $4x-y=1$. Posons $t=x-1\in\mathbb{R}$, de sorte que $x=t+1$. Puisque $4x-y=1$, on a $y=4x-1=4(t+1)-1=4t+3$. Ainsi, on a $(x,y)=(t+1,4t+3)$ avec $t\in\mathbb{R}$. Donc, $(x,y)\in C$.
- $B\subset A$: soit $(x,y)\in B$. Alors, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $x=t+1$ et $y=4t+3$. Dès lors, $4x-y=4(t+1)-(4t+3)=4t+4-4t-3=1$. Ainsi, on a bien $(x,y)\in A$.

8 Exercice 11

1. On procède par double inclusion.
   - $\{1\}\subset\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{n};n\right]$: Il est clair que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $1-\dfrac{1}{n}\leqslant 1\leqslant n$. Autrement dit, $1\in\left[1-\dfrac{1}{n};n\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. C'est-à-dire $1\in\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{n};n\right]$.
   - $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{n};n\right]\subset\{1\}$: Soit $x\in\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{n};n\right]$. Alors $x\in\left[1-\dfrac{1}{n};n\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $1-\dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant n$. En prenant $n=1$ dans l'inégalité de droite, on obtient $x\leqslant 1$. Par ailleurs, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de gauche, on obtient $x\geqslant 1$. Ainsi, $x=1$, *i.e* $x\in\{1\}$.
2. On procède également par double inclusion.

- $\mathbb{R}_+ \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right]$: Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x \in [0;1]$, alors en prenant $n = 1$, on a bien $x \in \left[1 - \frac{1}{n}; n+1\right]$. Sinon, posons $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}^*$. On a alors $x \leqslant n+1$. Par ailleurs, $x \geqslant n$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$. Ainsi, $x + \frac{1}{n} \geqslant x + \frac{1}{x} \geqslant 1$ (la preuve de la dernière égalité est élémentaire et laissée au lecteur). Ainsi, on a bien $x \in \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right]$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right]$. Donc, on a bien
$$\mathbb{R}_+ \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right]$$
- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right] \subset \mathbb{R}_+$: soit $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right]$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right]$. En particulier, $x \geqslant 1 - \frac{1}{n} \geqslant 0$. Donc, $x \in \mathbb{R}_+$. Donc, on a bien
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1+n\right] \subset \mathbb{R}_+$$

9 Exercice 15

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\frac{x+1}{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, i.e. $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
On fixe ensuite un $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on résout l'équation $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff \frac{x+1}{x-2} = y \iff x+1 = y(x-2) \qquad \text{car } x \neq 2 \\
&\iff x + 1 = xy - 2y \\
&\iff x(1-y) = -1 - 2y \\
&\iff x = \frac{1+2y}{y-1} \qquad \text{car } y \neq 1
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $x = \frac{1+2y}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus 2$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \frac{1+2y}{y-1} = 2$. On a alors : $1+2y = 2y-2$ soit $1 = -2$. Absurde. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $f(x) = y$.
On a bien montré que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :
$$f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-1}$$

10 Exercice 16

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $-6x^2 \leqslant x^2$ donc $-6x^2 - 3 \leqslant x^2 - 3$ donc $-3 \leqslant \frac{x^2-3}{2x^2+1}$ et $-3 \leqslant \frac{1}{2}$ donc $x^2 - 3 \leqslant x^2 + \frac{1}{2}$ donc $\frac{x^2-3}{2x^2+1} < \frac{1}{2}$.
Autrement dit, $\frac{x^2-3}{2x^1+1} \in \left[-3, \frac{1}{2}\right[$, i.e. $\varphi(x) \in \left[-3, \frac{1}{2}\right[$.
On fixe ensuite un $y \in \left[-3, \frac{1}{2}\right[$ et on résout l'équation $\varphi(x) = y$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = y &\iff \frac{x^2-3}{2x^2+1} = y \iff x^2 - 3 = y(2x^2+1) \qquad \text{car } 2x^2+1 \neq 0 \\
&\iff x^2 - 3 = 2x^2y + y \\
&\iff x^2(1-2y) = y + 3 \\
&\iff x^2 = \frac{y+3}{1-2y} \qquad \text{car } y \neq \frac{1}{2} \\
&\iff x = \pm\sqrt{\frac{y+3}{1-2y}} \qquad \text{car } \frac{y+3}{1-2y} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \left[-3, \frac{1}{2}\right[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_-$ tel que $f(x) = y$.

On a bien montré que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\left[-3, \frac{1}{2}\right[$. De plus, pour tout $y \in \left[-3, \frac{1}{2}\right[$, on a :

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y+3}{1-2y}}$$

11 Exercice 17

f étant définie de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f \circ f$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} \\ &= \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ f = \mathrm{Id}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $f^{-1} = f$.

12 Exercice 19

1. Soit $y \in]3, 4[$, on cherche $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) = y)$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{3x+1}{x+1} = y \\ &\iff 3x + 4 = xy + y \\ &\iff x(3-y) = y - 4 \\ &\iff x = \frac{y-1}{3-y} \quad \text{car } 3 - y \neq 0 \end{aligned}$$

   Il reste à vérifier que $x = \frac{y-1}{3-y} \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $y \in]3, 4[$, $y - 4 < 0$ et $3 - y < 0$ ainsi $x > 0$.

   L'application f réalise bien une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]3, 4[$ et on a pour tout $y \in]3, 4[$, $f^{-1}(y) = \frac{y-4}{3-y}$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$. On a :

$$\begin{aligned} g(x) = y \iff & \mathrm{e}^{2x+1} = y \\ & 2x + 1 = \ln(y) \quad \text{car } y > 0 \\ & x = \frac{\ln(y) - 1}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Ainsi l'application g réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $g^{-1}(y) = \frac{\ln(y) - 1}{2}$.

3. On remarque $f \circ g = h$.

4. Comme f et g sont bijectives, on en déduit que h est bijective et on a $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Ainsi pour tout $y \in]3, 4[$,

$$h^{-1}(y) = g^{-1}\left(\frac{y-4}{3-y}\right) = \frac{\ln\left(\frac{y-4}{3-y}\right) - 1}{2} = \ln\left(\sqrt{\frac{y-4}{3-y}}\right) - \frac{1}{2}.$$

13 Exercice 20

Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ et $x \mapsto 2\mathrm{e}^x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - (2\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue car dérivable. Ainsi d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.
Déterminons $f(\mathbb{R})$. Pour cela calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
On sait que $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc par opérations sur les limites $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
La deuxième limite est, a priori, une forme indéterminée, factorisons l'expression par le terme prépondérant, on a :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x(2-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \frac{2-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc par opérations sur les limites on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
On en déduit que $f(\mathbb{R}) =]-1,2[$.

Pour déterminer l'expression de sa bijection réciproque, il nous faut résoudre une équation. Soit $y \in]-1,2[$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = y \\ &\iff 2\mathrm{e}^x - 1 = y\mathrm{e}^x + y \\ &\iff \mathrm{e}^x(2-y) = y+1 \\ &\iff \mathrm{e}^x = \frac{y+1}{2-y} \quad \text{car } 2-y \neq 0 \\ &\iff x = \ln\left(\frac{y+1}{2-y}\right) \quad \text{car } y \in]-1,2[\text{ et donc } \frac{y+1}{2-y} > 0 \end{aligned}$$

On a donc pour tout $y \in]-1,2[$, $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+1}{2-y}\right)$.

14 Exercice 21

La fonction f est dérivable (donc continue) sur l'intervalle $[0;1]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

Ainsi f est strictement croissante sur $[0;1]$ et continue donc f est une bijection de $[0;1]$ dans $[f(0);f(1)] = [0;1]$.

15 Exercice 22

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et par croissances comparées, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
On peut donc construire le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après ses variations, la fonction f admet un minimum global qui vaut $-\mathrm{e}^{-1}$. Donc -1 n'a pas d'antécédent par f, et f n'est pas bijective.
3. f est strictement croissante et continue sur $[-1;+\infty[$. De plus, $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

   Ainsi, f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $J = [-\mathrm{e}^{-1};+\infty[$.
4. (a) $\widetilde{f}$ est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ car f l'est. Donc sa bijection réciproque l'est aussi.
$$\lim_{x\to -\mathrm{e}^{-1}} (\widetilde{f})^{-1}(x) = (\widetilde{f})^{-1}(-\mathrm{e}^{-1}) = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} (\widetilde{f})^{-1}(x) = +\infty.$$

   (b)
$$(\widetilde{f})^{-1}(-\mathrm{e}^{-1}) = -1.$$
   $f(0) = 0$ donc $(\widetilde{f})(0) = 0$, donc
$$(\widetilde{f})^{-1}(0) = 0$$
   $f(1) = \mathrm{e}$ donc $(\widetilde{f})(1) = \mathrm{e}$, donc
$$(\widetilde{f})^{-1}(\mathrm{e}) = 1$$

   (c) $\widetilde{f}$ est une bijection continue strictement monotone. De plus, elle est dérivable sur $[-1;+\infty[$ et on a :
$$\widetilde{f}'(-1) = 0, \qquad \forall x > -1,\ \widetilde{f}'(x) > 0.$$
   Donc $(\widetilde{f})^{-1}$ est dérivable sur $D =]-\mathrm{e}^{-1};+\infty[$ et n'est pas dérivable en $-\mathrm{e}^{-1}$ (Sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$).
   On a de plus, pour tout $y \in D$,
$$\begin{aligned}
(\widetilde{f}^{-1})'(y) &= \frac{1}{\widetilde{f}'(\widetilde{f}^{-1}(y))} \\
&= \frac{1}{\left(\widetilde{f}^{-1}(y)+1\right)\exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)} \\
&= \frac{1}{\widetilde{f}^{-1}(y)\exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right) + \exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)} \\
&= \frac{1}{\widetilde{f}(\widetilde{f}^{-1}(y)) + \exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)} \\
&= \frac{1}{y + \exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)}
\end{aligned}$$
   On a donc $(\widetilde{f}^{-1})'(0) = \dfrac{1}{0+\mathrm{e}^0} = 1$.
   et $(\widetilde{f}^{-1})'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

16 Exercice 23

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$f'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) = \ln(x) + 1.$$
   $f'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$ car $\exp$ est strictement croissante. Ainsi, f' est strictement positive sur $]\mathrm{e}^{-1},+\infty[$. Elle est de plus nulle en e^{-1}. Donc f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1},+\infty[$. Comme elle est aussi continue, f réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ vers $f([\mathrm{e}^{-1},+\infty[)$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1}$. Donc f réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ vers $[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.

2. La restriction de f à $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ est une bijection strictement monotone. Elle est dérivable et sa dérivée ne s'annule qu'en e^{-1}. On en déduit que g est dérivable sur $I =]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$. Elle n'est pas dérivable en $-\mathrm{e}^{-1}$ (sa courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$).
3. Pour tout $x \in I$,
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1+\ln(g(x))}$$
4. Les fonctions g et $\ln$ sont dérivables sur leurs domaines de définition, donc par opérations sur les fonctions dérivables, g' est dérivable sur I, c'est-à-dire que g est deux fois dérivable. On a alors, pour tout $x \in I$,
$$g''(x) = -\frac{\frac{g'(x)}{g(x)}}{(1+\ln(g(x)))^2} = \frac{-g'(x)^3}{g(x)}$$
5. $g(\mathrm{e})$ est l'unique solution de $f(x) = \mathrm{e}$ d'inconnue $x \in [\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$. Or, $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, donc $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$.
On a donc $g'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{1+\ln(g(\mathrm{e}))} = \dfrac{1}{1+\ln(\mathrm{e})} = \dfrac{1}{2}$.
D'après la question 3, $g''(\mathrm{e}) = \dfrac{-g'(\mathrm{e})^3}{g(\mathrm{e})} = \dfrac{-1}{8\mathrm{e}}$.