Ensembles et applications

Exercice 1 (♣)

Soient $E=\{1,2,3,4,5\}$ et $A=\{2,5,3\}$.

1. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse :

   (a) $4 \in E$
   (b) $4 \subset E$
   (c) $\{4\} \subset E$
   (d) $\{4\} \in E$

2. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse :

   (a) $A \subset E$
   (b) $A \in E$
   (c) $A \subset \mathcal{P}(E)$
   (d) $A \in \mathcal{P}(E)$

3. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse :

   (a) $\{2,3\} \subset A$
   (b) $\{2,3\} \subset \mathcal{P}(E)$
   (c) $\{2,3\} \in \mathcal{P}(E)$
   (d) $A=\emptyset$

Exercice 2 (♣)

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles : $A\cap B$, $A\cup B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $A\cup\overline{B}$, $A\setminus B$ et $B\setminus A$.

1. $E=\{1,2,3,4\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,4\}$
2. $E=\mathbb{R}$, $A=]-\infty;3]$, $B=[2;+\infty[$
3. $E=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{N}$, $B=]0;+\infty[$

Exercice 3 (♣)

Soit $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ et soient les parties suivantes de E :

$$A=\{1,2,3,4\}, \qquad B=\{4,5,6,7\},$$
$$C=\{1,3,5,7\}, \qquad D=\{2,3,4,5,6\}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $(A\cap B)\cup(C\cap D)$
2. $(A\cup C)\cap(B\cup D)$
3. $(\overline{A}\cap D)\cap(\overline{B\cup C})$

Exercice 4 (♣)

Soient A et B deux ensembles tels que $A\subset B$.
Montrer que $\overline{B}\subset\overline{A}$.

Exercice 5 (♣)

Soient A et B deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A=B \iff A\cup B=A\cap B$$

Exercice 6 (♣)

Soit $E=\{a,b,c,d\}$. Décrire explicitement l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 7 (♣)

Soient A et B deux ensembles.

1. Montrer que $A\cup(A\cap B)=A$.
2. Montrer que $A\cap(A\cup B)=A$.

Exercice 8 (♦)

Soit E un ensemble et A,B deux sous ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$ le sous-ensemble de E :

$$A\Delta B=\{x\in A\cup B; x\notin A\cap B\}$$

1. Interpréter les éléments de $A\Delta B$.
2. Montrer que $A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$ (ou $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Calculer $A\Delta A, A\Delta\varnothing, A\Delta E, A\Delta\bar{A}$.
4. Démontrer que pour tous A,B et C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$$

Exercice 9 (♠)

Soit E un ensemble et soient A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.
2. Montrer que $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

Exercice 10 (♥)

Soit $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x-y=1\right\}$ et
$B=\left\{(t+1;4t+3) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$. Démontrer que $A=B$.

Exercice 11 (♠)

Montrer les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{n};n\right]=\{1\}$
2. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{n};1+n\right]=\mathbb{R}_+$

Exercice 12 (♣)

Soient $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ deux applications.
On note $h=g\circ f$.

1. Montrer que si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si h est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 13 (♦)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array} \right.$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (composée successive de n fonctions f).
Déterminer f^2 et f^3 et conjecturer une expression de f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer votre conjecture.

Exercice 14 (♣)

On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 7x-8 \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 15 (♥)

On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$.

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 16 (♥)

On définit l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \left[-3; \dfrac{1}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2-3}{2x^2+1} \end{array} \right.$.

Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.

Exercice 17 (♥)

On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x}{1+x} \end{array} \right.$.

Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 18 (♠)

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 19 (♥)

1. On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow &]3;4[\\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x+1} \end{array} \right.$.

   Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

2. On définit l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{2x+1} \end{array} \right.$.

   Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

3. On définit l'application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]3;4[\\ x & \longmapsto & \dfrac{3\mathrm{e}^{2x+1}+4}{\mathrm{e}^{2x+1}+1} \end{array} \right.$.

   (a) Comparer h et $f \circ g$.

   (b) Montrer que h est bijective et déterminer h^{-1}.

Exercice 20 (♥)

On considère la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. Puis déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 21 (♥)

On considère la fonction définie par $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - x$. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 22 (♥)

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. La fonction f est-elle bijective ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
   Soit $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}$ et $\widetilde{f}^{-1}$ la bijection réciproque de $\widetilde{f}$.
4. (a) Préciser les variations de $(\widetilde{f})^{-1}$ et ses limites aux bornes de son ensemble de départ.

   (b) Calculer $\widetilde{f}^{-1}(-1/\mathrm{e})$, $\widetilde{f}^{-1}(0)$, et $\widetilde{f}^{-1}(e)$.

   (c) Déterminer le domaine D sur lequel la fonction $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable. Montrer que pour tout $y \in D$, $(\widetilde{f}^{-1})'(y) = \dfrac{1}{y + \exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)}$.
   Calculer $(\widetilde{f}^{-1})'(0)$ et $(\widetilde{f}^{-1})'(\mathrm{e})$.

Exercice 23 (♥)

Considérons la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-1};+\infty[$ dans un ensemble à préciser. On note g la fonction réciproque de cette bijection.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de g. On note I ce domaine.
3. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$.
4. Justifier que g est deux fois dérivable sur I et calculer $g''(x)$ pour tout $x \in I$.
5. Calculer $g(\mathrm{e})$, $g'(\mathrm{e})$ et $g''(\mathrm{e})$.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !