Correction partielle du TD 8 : Polynômes

Table des matières

1 Exercice 5

On cherche $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P+1 = Q^2$. Commençons par déterminer le degré de Q. On sait que $\deg(P+1) = 4$ et que $\deg(Q^2) = 2\deg(Q)$, ainsi $2\deg(Q) = 4$ et donc $\deg(Q) = 2$. On cherche donc $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P+1 = Q^2$.
Comme $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe trois réels a, b, c tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax^2+bx+c$. Calculons d'une part Q^2, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q^2 = (ax^2+bx+c)^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + 2acx^2 + b^2x^2 + 2bcx + c^2 = a^2x^4 + 2abcx^3 + (2ac+b^2)x^2 + 2bcx + c^2.$$

D'autre part, on a :

$$P+1 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$$

Comme on veut $P+1 = Q^2$, on obtient, par identification, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & -4 \\ 2ac+b^2 & = & 10 \\ 2bc & = & -12 \\ c^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

On résout ce système, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ 2b & = & -4 \\ 2c+b^2 & = & 10 \\ 2bc & = & -12 \\ c^2 & = & 9 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ -2b & = & -4 \\ -2c+b^2 & = & 10 \\ 2bc & = & -12 \\ c^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -2 \\ 2c & = & 6 \\ -4c & = & -12 \\ c^2 & = & 9 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ b & = & 2 \\ -2c & = & 6 \\ 4c & = & -12 \\ c^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

soit

$$a = 1,\, b = -2,\, c = 3 \quad \text{ou} \quad a = -1,\, b = 2,\, c = -3$$

On a donc :

$$P+1 = (x^2-2x+3)^2 = (-x^2+2x-3)^2.$$

Partant de $P+1 = (x^2-2x+3)^2$, on peut en déduire une factorisation de P. En effet, on a, en reconnaissant une identité remarquable :

$$P = (x^2-2x+3)^2 - 1 = (x^2-2x+3-1)(x^2-2x+3+1) = (x^2-2x+2)(x^2-2x+4)$$

Le discriminant associé à x^2-2x+2 vaut $\Delta = -6 < 0$ donc ce polynôme est irréductible.
Le discriminant associé à x^2-2x+4 vaut $\Delta = -12 < 0$ donc ce polynôme est irréductible.

2 Exercice 6

On cherche $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P-8 = Q^3$. Commençons par déterminer le degré de Q. On sait que $\deg(P-8) = 3$ et que $\deg(Q^3) = 3\deg(Q)$, ainsi $3\deg(Q) = 3$ et donc $\deg(Q) = 1$. On cherche donc $Q \in \mathbb{R}_1[x]$ tel que $P-8 = Q^3$.
Comme $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe deux réels a, b tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax+b$. Calculons d'une part Q^2, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q^3 = (ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$$

D'autre part, on a :

$$P-8 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

Comme on veut $P-8 = Q^3$, on obtient, par identification, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a^3 & = & 8 \\ 3a^2b & = & -12 \\ 3ab^2 & = & 6 \\ b^3 & = & -1 \end{array}\right.$$

On résout ce système, on a alors $a = 2\, b = -1$. Ainsi $Q(x) = 2x - 1$.
Comme on a : $P - 8 = Q^3$, il en découle que $P = Q^3 + 8$ et on peut en déduire une factorisation du polynôme P, en effet :

$$P = Q^3 - (-2)^3 = (Q - (-2))((-2)^2 + Q \times (-2) + Q^2) = (Q + 2)(Q^2 - 2Q + 4)$$

soit

$$P = (2x + 1)((2x - 1)^2 - 2(2x - 1) + 4) = (2x + 1)(4x^2 - 8x + 7)$$

Le discriminant associé au polynôme $4x^2 - 8x + 7$ étant négatif, ce polynôme est irréductible.

3 Exercice 13

Comme $P \in \mathbb{R}_3[x]$, il existe quatre réels a, b, c, d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On veut que P vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x + 1) - P(x) = x^2$. Calculons les différents termes. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d \\ &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + cx + c + d \\ &= ax^3 + (3a + b)x^2 + (3a + 2b + c)x + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= ax^3 + (3a + b)x^2 + (3a + 2b + c)x + a + b + c + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c \end{aligned}$$

Comme on veut $P(x + 1) - P(x) = x^2$, par identification des coefficients, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3a &= 1 \\ 3a + 2b &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases}$$

On a donc $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x + d}$.

Calculons maintenant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, on a, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(k+1) - \sum_{k=0}^{n} P(k) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} P(j) - \sum_{k=0}^{n} P(k) \quad \text{en posant dans la 1ère somme } j = k+1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(j) + P(n+1) - \sum_{k=1}^{n} P(k) - P(0) \\
&= P(n+1) - P(0) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) + d - d \\
&= \frac{2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On retrouve alors le résultat connu.

Procédons de manière similaire pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4$.

On cherche $Q \in \mathbb{R}_5[x]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x+1) - Q(x) = x^4.$$

Comme $Q \in \mathbb{R}_5[x]$, il existe 6 réels a, b, c, d, e, f tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

Calculons les différents termes. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Q(x+1) &= a(x+1)^5 + b(x+1)^4 + c(x+1)^3 + d(x+1)^2 + e(x+1) + f \\
&= a(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) + b(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \\
&+ c(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + d(x^2 + 2x + 1) + e(x+1) + f \\
&= ax^5 + (5a+b)x^4 + (10a + 4b + c)x^3 + (10a + 6b + 3c + d)x^3 + (5a + 4b + 3c + 2d + e)x + a + b + c + d + e + f
\end{aligned}$$

d'où

$$Q(x+1) - Q(x) = 5ax^4 + (10a + 4b)x^3 + (10a + 6b + 3c)x^3 + (5a + 4b + 3c + 2d)x + a + b + c + d + e$$

Comme on veut $Q(x+1) - Q(x) = x^4$, par identification des coefficients, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}
5a &= 1 \\
10a + 4b &= 0 \\
10a + 6b + 3c &= 0 \\
5a + 4b + 3c + 2d &= 0 \\
a + b + c + d + e &= 0
\end{cases}$$

On obtient alors :

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = 0, \quad e = -\frac{1}{30}$$

Ainsi $Q(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x + f$.

Calculons maintenant $\sum_{k=0}^{n} k^4$, en utilisant ce qui précède et en procédant au même télescopage, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^4 &= \sum_{k=0}^{n} Q(k+1) - Q(k) \\
&= Q(n+1) - Q(0) \\
&= \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}(n+1) + f - f \\
&= \frac{6(n+1)^5 - 15(n+1)^4 + 10(n+1)^3 - (n+1)}{30} \\
&= \frac{(n+1)(6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1)}{30} \\
&= \frac{(n+1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 45n^2 - 45n - 15 + 10n^2 + 20n + 10 - 1)}{30} \\
&= \frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n}{30} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}}$.

Cette expression peut encore se factoriser (en remarquant que $-\frac{1}{2}$ est racine de $6n^3 + 9n^2 + n - 1$ par exemple) et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n + 1)}{30}$$

4 Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}$, remarquons que l'on peut écrire l'équation sous la forme suivante :

$$(\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x + \frac{6}{\mathrm{e}^x} - 5 = 0$$

soit en mettant les termes au même dénominateur :

$$\frac{(\mathrm{e}^x)^3 - 2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 6}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \neq 0$, cela équivaut à :

$$(\mathrm{e}^x)^3 - 2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$$

Posons alors $X = \mathrm{e}^x$, on obtient alors l'équation :

$$X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = 0$$

Factorisons ce polynôme de degré 3 pour résoudre cette équation. On remarque que 1 est racine évidente de ce polynôme, il existe donc $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que : $X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X-1)Q(X)$.
On peut déterminer en effectuant la division euclidienne de $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ par $X - 1$ par exemple. On obtient :

$$Q(X) = X^2 - X - 6$$

Notons Δ le discriminant associé à Q, on a : $\Delta = 25$, Q possède donc deux racines -2 et 3. On a donc la factorisation suivante :

$$X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X-1)(X^2 - X - 1) = (X-1)(X+2)(X-3)$$

On est donc ramener à résoudre :

$$(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x - 3) = 0.$$

En appliquant la règle du produit nul, on obtient :

$$\mathrm{e}^x = 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^x = -2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^x = 3$$

Comme $-2 < 0$, on a deux solutions qui sont $x = \ln(1) = 0$ et $x = \ln(3)$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{0, \ln(3)\}}$.

5 Exercice 16

La fonction P est dérivable car polynomiale. On a d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = n(x+1)^{n-1}.$$

D'autre part, on peut développer P à l'aide du binôme de Newton et on obtient :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Dérivons P sous sa forme développée, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

On peut alors affirmer que pour tout réel x :

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

Evaluons cette égalité pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

6 Exercice 18

La relation étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut l'évaluer en $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on a alors :

$$P(2k\pi)\cos(2k\pi) + Q(2k\pi)\sin(2k\pi) = 0.$$

Or pour tout $k \in \mathbb{Z}*$, $\cos(2k\pi) = 1$ et $\sin(2k\pi) = 0$, on obtient alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(2k\pi) = 0.$$

Autrement dit, le polynôme P possède une infinité de racines donc $\boxed{P = 0}$.

L'égalité est donc maintenant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x)\sin(x) = 0$. Evaluons là en $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad Q(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$$

Or $\sin(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$, on obtient alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad Q(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$$

Autrement dit, le polynôme Q possède une infinité de racines donc $\boxed{Q = 0}$.