Polynômes

Exercice 1 (♣)

Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants pour un entier $n \geq 2$:

1. $Q : x \mapsto \prod_{k=0}^{n} (2x-k)$,
2. $R : x \mapsto (x+1)^n - (x-1)^n$,
3. $P : x \mapsto (x+1)^{2n} - x^{2n-1}(x+2n)$ pour $n \geq 2$.

Exercice 2 (♣)

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme Q dans les cas suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = xP(x) - P'(x)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x) - xP'(x)$.

Exercice 3 (♣)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{2} x P'(x).$$

Exercice 4 (♠)

Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P\left(x^2\right) = \left(x^2+1\right) P(x) \tag{1}$$

1. Quelques exemples :
   (a) Le polynôme $P : x \mapsto x^3 + x + 1$ est-il solution ?
   (b) Le polynôme nul est-il solution ?
   (c) Montrer alors qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution.
2. **Analyse du problème :** soit P un polynôme non-nul solution de l'équation (1).
   (a) En posant $n = \deg(P)$, déterminer la seule valeur de n possible.
   (b) En déduire alors tous les candidats.
3. **Synthèse du problème :** déterminer toutes les solutions.

Exercice 5 (♥)

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8.$$

Montrer que $P+1$ est le carré d'un polynôme Q à déterminer. En déduire une factorisation en produit de facteurs irréductibles du polynôme P.

Exercice 6 (♥)

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 7.$$

Montrer que $P-8$ est le cube d'un polynôme Q à déterminer. (♦) En déduire une factorisation en produit de facteurs irréductibles du polynôme P.

Exercice 7 (♣)

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2.$$

Déterminer une racine évidente du polynôme P et en déduire une factorisation en produit de facteurs irréductibles du polynôme P.

Exercice 8 (♣)

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4.$$

Déterminer une racine évidente du polynôme P et en déduire une factorisation en produit de facteurs irréductibles du polynôme P.

Exercice 9 (♠)

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. x^n par $x^2 - 3x + 2$
2. x^n par $(x-1)^2$
3. $(x-1)^n + (x+1)^n - 1$ par $x^2 - 1$

Exercice 10 (♣)

Soit $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

1. Vérifier que 1 est racine double de P.
2. Ecrire la formule de Taylor pour P en 1.
3. Calculer le quotient de P par $(x-1)^2$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 11 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = 0.$$

Exercice 12 (♣)

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \left|-x^2 + 5x - 7\right|.$$

La fonction f est-elle un polynôme ?

Exercice 13 (♥)

Déterminer un polynôme de degré 3 tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x+1) - P(x) = x^2$$

En déduire une nouvelle méthode pour démontrer la formule

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(♦) En utilisant une méthode similaire mettant en scène un polynôme Q de degré 5, déterminer une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} k^4.$$

Exercice 14 (♥)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 6\mathrm{e}^{-x} = 5$.

Exercice 15 (♦)

Soit $n \geq 2$. Le but de l'exercice est de calculer

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}.$$

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall k \geq 2, \qquad \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Exercice 16 (♥)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose P le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \to (x+1)^n$. Calculer de deux manières différentes la dérivée P' de P. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 17 (♣)

Soit $P(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 2$.

1. Montrer que P possède deux racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.
3. Résoudre l'inéquation
$$-(\ln(x))^4 + 2(\ln(x))^3 - \ln(x) > -2.$$

Exercice 18 (♥)

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0.$$

Montrer que $P = Q = 0$.

Exercice 19 (♣)

Montrer que $x^2 + 2x - 3$ divise $x^3 + x^2 - 5x + 3$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 20 (♠)

Soit la suite de polynômes (P_n) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2}$$

et pour tout entier $n \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}.$$

1. A l'aide de la définition, écrire les polynômes P_3 et P_4.
2. Déterminer la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n pour $n \geq 1$.
3. Factoriser le polynôme P_2.
Bonus : faire de même pour P_3.
4. Montrer alors que pour tout $n \geq 1$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k).$$

Exercice 21 (♠)

1. On définit sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ les fonctions f et g par :
$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x))$$
et
$$g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$
   (a) Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme P défini par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$
   En déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$,
   $$u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$,
   $$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}.$$
   (e) En déduire les variations de v sur I.
   (f) Montrer que : $\forall x \in I, g(x) < x < f(x)$.
2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.

♣ Du trêfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !