Suites convergentes

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 2

La suite est définie par

$$u_0 = 2021 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

Indication 1. À partir du rang 1, que peut-on dire du signe de u_n ?

Indication 2. Si $u_n \geq 0$, alors

$$0 < \mathrm{e}^{-u_n} \leq 1.$$

En déduire un encadrement très simple de u_{n+1}.

Indication 3. L'encadrement obtenu permet d'appliquer directement le théorème des gendarmes.
Il n'est donc pas nécessaire d'étudier la monotonie de la suite.

Exercice 10

On considère

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

L'énoncé suggère d'étudier séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Indication 1. Calculer

$$u_{2n+2} - u_{2n}.$$

Les deux seuls nouveaux termes sont ceux d'indices $2n+1$ et $2n+2$.

Indication 2. Étudier le signe de cette différence. Vous obtenez la monotonie de la suite (u_{2n}).

Indication 3. Procéder de même pour

$$u_{2n+3} - u_{2n+1}$$

afin d'étudier (u_{2n+1}).

Indication 4. Comparer maintenant u_{2n} et u_{2n+1}.
Leur différence est particulièrement simple.

Indication 5. Montrer que les deux sous-suites sont adjacentes.
Elles convergent donc vers une même limite.

Indication 6. Pour conclure sur la suite (u_n) entière, utiliser le fait que tout entier est pair ou impair : les termes de rang pair et impair tendent vers la même limite.

Exercice 11

Les suites sont définies par

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \qquad 0 < v_0 < u_0.$$

1. On veut montrer

$$0 < v_n < u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication 1. Procéder par récurrence.
Supposer

$$0 < v_n < u_n.$$

Les dénominateurs intervenant dans les définitions de u_{n+1} et v_{n+1} sont alors strictement positifs.

Indication 2. La positivité de u_{n+1} et v_{n+1} est immédiate.
Pour comparer u_{n+1} et v_{n+1}, étudier leur différence.

Indication 3. Après réduction au même dénominateur, un carré doit apparaître.

2. On veut montrer que les deux suites convergent vers une même limite.

Indication 1. Comparer u_{n+1} à u_n en utilisant $v_n < u_n$.

Indication 2. Comparer de même v_{n+1} à v_n.

Indication 3. Vous devez obtenir que l'une des suites est décroissante et l'autre croissante.
La question 1 fournit en plus un encadrement entre elles.

Indication 4. Pour montrer qu'elles ont la même limite, étudier

$$u_{n+1} - v_{n+1}$$

ou comparer directement les deux limites dans les relations de récurrence.

3. On pose

$$w_n = u_n v_n.$$

Indication 1. Calculer

$$w_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1}.$$

Une simplification immédiate doit apparaître.

Indication 2. En déduire la nature de (w_n), puis son expression en fonction de w_0.

Indication 3. Si u_n et v_n convergent toutes deux vers ℓ, alors

$$u_n v_n \longrightarrow \ell^2.$$

Comparer cette limite avec la valeur constante obtenue pour w_n.

Indication 4. Utiliser enfin la positivité de ℓ pour choisir la bonne racine.

Exercice 12

On considère

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

1. **Indication.** Écrire explicitement les termes de la somme pour $n = 1, 2, 3$. Cela aide à comprendre comment les bornes se déplacent.
2. On veut montrer que (u_n) est décroissante.
   Indication 1. Écrire
   $$u_{n+1} - u_n$$
   en développant seulement les termes qui apparaissent ou disparaissent entre les deux sommes.
   Indication 2. On peut aussi écrire
   $$u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$
   Comparer alors avec
   $$u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
   Indication 3. Il reste à comparer
   $$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$
   avec $\dfrac{1}{n}$.
   Indication 4. La suite est positive. Une fois la décroissance obtenue, quel théorème permet de conclure à sa convergence ?
3. On cherche un encadrement de u_n.
   Indication 1. Dans la somme
   $$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$
   tous les termes sont compris entre $\dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{n}$.
   Compter soigneusement le nombre de termes.
   Indication 2. Cet encadrement donne déjà des bornes constantes sur la limite, mais on peut faire légèrement mieux en séparant éventuellement le premier ou le dernier terme.
   Indication 3. Passer ensuite à la limite dans l'encadrement obtenu.

Exercice 15

On suppose qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |u_k - \ell| \leq a^k,$$
et on pose
$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$
On veut montrer que $v_n \to \ell$.

Indication 1. Commencer par écrire
$$v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell).$$
Indication 2. Prendre la valeur absolue et utiliser l'inégalité triangulaire :
$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|.$$
Indication 3. Utiliser l'hypothèse
$$|u_k - \ell| \leq a^k.$$
Il reste à majorer une somme géométrique.
Indication 4. Comme $0 \leq a < 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} a^k$$
est majorée indépendamment de n.
Vous devez ainsi obtenir une majoration de $|v_n - \ell|$ de la forme
$$\frac{C}{n},$$
où C ne dépend pas de n.
Indication 5. Conclure avec le théorème des gendarmes.

Exercice 16 (♠♠)

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et
$$v_n = u_{\varphi(n)}.$$
1. On suppose que $u_n \to \ell$ et on veut montrer que $v_n \to \ell$.
   Indication 1. Commencer par montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(n) \geq n.$$
   On peut le faire par récurrence en utilisant le fait que φ est strictement croissante et à valeurs entières.
   Indication 2. Revenir ensuite à la définition de la convergence.
   Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que
   $$p \geq N \Longrightarrow |u_p - \ell| < \varepsilon.$$
   Indication 3. Si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq n \geq N$. Appliquer la propriété précédente à $p = \varphi(n)$.
2. La réciproque est-elle vraie ?
   Indication 1. Chercher une suite (u_n) qui ne converge pas mais dont une sous-suite très simple converge.
   Indication 2. Les suites faisant intervenir $(-1)^n$ fournissent des exemples naturels.
3. On veut établir le lien entre la convergence de (u_n) et celles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   Indication 1. Un sens découle immédiatement de la première question : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites.
   Indication 2. Pour la réciproque, supposer que
   $$u_{2n} \longrightarrow \ell \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \longrightarrow \ell.$$
   Indication 3. À partir d'un certain rang, les termes pairs sont proches de ℓ et les termes impairs aussi. Or tout entier est soit pair, soit impair.
   Indication 4. Formaliser cette idée avec la définition en ε de la convergence.