Suites convergentes

Exercice 1 (♣)

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$
2. $u_n = n3^n - 3^{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{-2}{\sqrt{n}+5}$
4. $u_n = \dfrac{n^3+n}{n^2-4n^3}$
5. $u_n = \dfrac{3n-4}{2n+5}$
6. $u_n = 5n - 2\sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$
8. $u_n = 8 + (-1)^n$
9. $u_n = n + (-1)^n$
10. $u_n = \ln(n) - n$
11. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$
12. $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
13. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
14. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
15. $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour un réel x fixé
16. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$
17. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{4n^2+\sin(n)+\ln(n)}$
18. $u_n = \dfrac{\ln(n+\mathrm{e}^n)}{n}$
19. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}, \quad (a,b) \in]0;+\infty[^2$

Exercice 2 (♠)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \quad \text{et} \quad u_0 = 2021.$$

Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (♥)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (♣)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 6.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 (♥)

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_{n+1} = (1-a_n)^3 + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0,4$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < a_n < 1$.
2. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 6 (♥)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq 3.$$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|.$$
5. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$
6. Conclure.

Exercice 7 (♥)

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad H_n \geq \ln(n+1).$$
4. Conclure quant à la limite de la suite (H_n).

Exercice 8 (♣)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Conclure.

Exercice 9 (♥ ♦)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
   On note γ la limite de u. Ce réel est appelé la constante d'Euler.
2. A partir de quel entier est-on assuré que u_n est une approximation de γ à 10^{-3} près ?

Exercice 10 (♠)

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
Indication : on commencera par étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice 11 (♠)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad 0 < v_0 < u_0$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < u_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Étudier la nature de la suite de terme général $w_n = u_n v_n$. En déduire la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 12 (♠)

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.
3. Majorer et minorer u_n, puis en déduire un encadrement de la limite de (u_n).

Exercice 13 (♣)

Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad (u_n)^2 \geq 2n + (u_0)^2$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 14 (♥)

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \qquad u_n = \frac{3^n}{n!}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que :
$$\forall n \geq 5 \qquad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$
4. En déduire que :
$$\forall n \geq 5 \qquad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} u_5.$$
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 15 (♠)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ et telle qu'il existe $a \in [0;1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_k - \ell| \leq a^k$. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge également vers ℓ.

Exercice 16 (♠♠)

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour terme général : $v_n = u_{\varphi(n)}$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. En déduire le lien entre la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la convergence de ses suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !