

Calcul matriciel

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 18 (♠♠)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

On veut montrer que A est inversible.

Indication 1. Comme suggéré dans l'énoncé, raisonner par l'absurde.

Supposer que A n'est pas inversible. Il existe alors une matrice colonne non nulle

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

telle que

$$AX = 0.$$

Indication 2. Puisque $X \neq 0$, au moins l'un des réels $|x_i|$ est non nul.

Choisir un indice i_0 tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Indication 3. Écrire la i_0 -ième ligne de l'égalité $AX = 0$:

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j = 0.$$

Isoler le terme diagonal puis prendre les valeurs absolues.

Indication 4. Utiliser l'inégalité triangulaire ainsi que

$$|x_j| \leq |x_{i_0}|$$

pour tout j .

Vous devez faire apparaître une inégalité incompatible avec l'hypothèse de diagonale strictement dominante.

Indication 5. Ne pas oublier que $|x_{i_0}| > 0$, puisque X est non nulle. On peut donc simplifier par cette quantité pour obtenir la contradiction.

Exercice 19

On considère la matrice

$$B = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1. On cherche une matrice triangulaire M telle que

$$B = {}^tMM.$$

Indication 1. Comme proposé dans l'énoncé, commencer par les cas $n = 3$ puis $n = 4$.

Chercher une matrice très simple dont les coefficients sont uniquement des 0 et des 1.

Indication 2. Pour obtenir

$$({}^tMM)_{i,j} = \min(i, j),$$

il serait utile que ce coefficient soit le nombre de termes égaux à 1 dans un certain produit scalaire.

Indication 3. Essayer une matrice triangulaire dont la j -ième colonne contient exactement j coefficients égaux à 1.

Indication 4. Une fois M conjecturée, calculer le coefficient général

$$({}^tMM)_{i,j}$$

et montrer qu'il vaut bien $\min(i, j)$.

2. On veut en déduire que B est inversible et calculer B^{-1} .

Indication 1. La matrice M trouvée à la question précédente est triangulaire. Examiner ses coefficients diagonaux.

Que peut-on en déduire sur son inversibilité ?

Indication 2. Puisque

$$B = {}^tMM,$$

utiliser la formule donnant l'inverse d'un produit.

Indication 3. Chercher d'abord M^{-1} sur les petits cas $n = 3$ et $n = 4$.

Une matrice bidiagonale très simple doit apparaître.

Indication 4. Écrire ensuite

$$B^{-1} = M^{-1}({}^tM)^{-1} = M^{-1}({}^t(M^{-1})).$$

Effectuer le produit en repérant la structure de la matrice obtenue : elle est presque tridiagonale.

Exercice 22 (♥♠)

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. **Indication 1.** Calculer A^2 puis chercher deux réels λ et μ tels que

$$A^2 = \lambda A + \mu I_3.$$

Indication 2. Pour déterminer λ et μ , il suffit de comparer quelques coefficients judicieusement choisis de A^2 avec ceux de $\lambda A + \mu I_3$.

2. On veut montrer que

$$A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3.$$

Indication 1. Procéder par récurrence sur n .

À l'initialisation, déterminer la valeur de a_0 imposée par l'égalité.

Indication 2. Pour l'hérédité, multiplier l'expression de A^n par A :

$$A^{n+1} = A^n A.$$

Indication 3. Remplacer ensuite A^2 grâce à la relation trouvée à la première question, puis regrouper les coefficients devant A et devant I_3 .

Indication 4. Identifier alors une relation de récurrence vérifiée par a_{n+1} en fonction de a_n .

3. **Indication.** La relation obtenue précédemment doit permettre de reconnaître directement une suite géométrique, ou de s'y ramener après une simplification très courte.

4. **Indication.** Déterminer a_n à l'aide de a_0 et de la relation trouvée, puis reporter cette expression dans la formule de A^n .

Exercice 24

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}.$$

Indication 1. Commencer par l'initialisation $n = 0$.

Quelle doit être la valeur de a_0 pour que la matrice proposée soit égale à I_3 ?

Indication 2. Pour l'hérédité, supposer la formule vraie au rang n puis calculer

$$A^{n+1} = A^n A.$$

Indication 3. Ne développer que ce qui est nécessaire et chercher à remettre la matrice obtenue sous exactement la même forme.

Cela fournit une relation entre a_{n+1} et a_n .

2. **Indication 1.** À partir de la relation obtenue à la question précédente, reconnaître une suite arithmético-géométrique :

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta.$$

Indication 2. Chercher son point fixe ℓ vérifiant

$$\ell = \alpha \ell + \beta,$$

puis introduire

$$b_n = a_n - \ell.$$

3. **Indication.** Une fois a_n explicité, il suffit de remplacer a_n dans l'expression matricielle obtenue à la première question.