Correction partielle du TD 6 : Calcul matriciel

Table des matières

1 Exercice 2

On a :

$$X - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-(X - 2I_3) = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4(I_3 - X) = 4\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Exercice 3

On a :

- $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 48 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$
- $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

Donc,

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 24 & 48 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 172 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et donc

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 43 \end{pmatrix}$$

On a $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2$ donc $AB \neq BA$.

3 Exercice 4

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 41 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\xcancel{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}$

4 Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que toute matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tB = B$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$ {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$$

   Ainsi la matrice ${}^tAA$ est bien symétrique.

2. Soit X une matrice symétrique alors on a :

$$^t(^tAX + XA) = {}^t(^tAX) + {}^t(XA) = {}^tX^t(^tA) + {}^tA^tX = XA + {}^tAX \text{ car } X \text{ est symétrique.}$$

Ainsi la matrice $^tAX + XA$ est bien symétrique

3. Soit X un matrice antisymétrique, on a :

$$^t(^tAX + XA) = {}^t(^tAX) + {}^t(XA) = {}^tX^t(^tA) + {}^tA^tX = -XA - {}^tAX = -(^tAX + XA) \text{ car } X \text{ est antisymétrique.}$$

Ainsi la matrice $^tAX + XA$ est bien antisymétrique

5 Exercice 10

1. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 7L_1 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -14 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{-14} L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Donc, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 18 & 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{18} L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{-9} L_2} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{9} L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right)$$

Donc, la matrice B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

3. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 6L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -18 & 0 & -19 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 18L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 17 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{17}{6} & \dfrac{7}{6} & \dfrac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{25}{6} & -\dfrac{11}{6} & \dfrac{1}{6} \end{array}\right)$$

Donc, la matrice C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{6} & \dfrac{7}{6} & \dfrac{1}{6} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\dfrac{25}{6} & -\dfrac{11}{6} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$

4. La matrice est de taille 2, on peut donc directement utiliser la formule du cours pour les matrices de taille 2. On a $ad - bc = 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 2 + 3 = 5 \neq 0$. Donc, D est inversible et

$$D^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5. La matrice E est diagonale, avec ses coefficients diagonaux non nuls. Donc E est inversible et :

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

6. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 4 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{-4}L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{-4}L_2} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{array}\right)$$

Donc, la matrice F est inversible et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

7. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -6 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{-3}L_2} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Donc, la matrice G est inversible et $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

8. La matrice H est diagonale, avec ses coefficients diagonaux non nuls, donc H est inversible et

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

6 Exercice 11

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

(b) Supposons, par l'absurde, que A est inversible. Il existe alors une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_3$. On a alors;

$$(AB)^3 = I_3^3 = I_3$$

Or, puisque A et B commutent, on a

$$(AB)^3 = A^3B^3 = 0_3 \times B^3 = 0_3$$

Ainsi,

$$0_3 = I_3$$

ce qui est bien sûr absurde.
Conclusion : La matrice A n'est pas inversible.

2. (a) En développant le produit, on obtient :

$$(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$$

(b) $I - A$ est donc inversible d'inverse $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

3. On a :

$$(I + A)(I - A + A^2) = I - A + A^2 + A - A^2 + A^3 = I$$

donc $I + A$ est inversible d'inverse $(I + A)^{-1} = I - A + A^2$.

7 Exercice 12

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5I_3$$

On a donc $A \times A^2 = 5I_3$. Et donc, $A \times \frac{1}{5}A^2 = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}A^2$. Plus précisément,

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons, par l'absurde, que B est inversible. Il existe alors une matrice A telle que $B \times A = A \times B = I_3$. On a alors;

$$(BA)^3 = I_3^3 = I_3$$

Or, puisque B et A commutent, on a

$$(BA)^3 = B^3A^3 = 0_3 \times A^3 = 0_3$$

Ainsi,

$$0_3 = I_3$$

ce qui est bien sûr absurde.
Conclusion : La matrice B n'est pas inversible.

8 Exercice 13

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$-A^3 - 3A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -9 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & 3 & -9 \\ -24 & 12 & -15 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 15 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(b) On vient de voir que $-A^3 - 3A^2 - 3A = I_3$. En factorisant par A à gauche de l'égalité, cela donne :

$$A \times (-A^2 - 3A - 3I_3) = I_3$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$.

(a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Et donc,

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

(b) On vient de voir que $A^3 - A = 4I_3$. En factorisanr par A à gauche, on obtient :

$$A(A^2 - A) = 4I_3$$

Donc,

$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - A) = I_3$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{4}(A^2 - A)$.

9 Exercice 14

1. Commençons par calculer C^2 et C^3, on a :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha\gamma \\ 0 & \beta & \alpha + \beta\gamma \\ 1 & \gamma & \beta + \gamma^2 \end{pmatrix} \text{ et } C^3 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma & \beta\alpha + \alpha\gamma^2 \\ \beta & \alpha + \beta\gamma & \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma^2 \\ \gamma & \beta + \gamma^2 & \alpha + 2\beta\gamma + \gamma^3 \end{pmatrix}$$

On effectue alors le calcul $C^3 - \gamma C^2 - \beta C - \alpha I_3$ et on obtient bien la matrice nulle.

2. Supposons $\alpha \neq 0$, on a alors :

$$C^3 - \gamma C^2 - \beta C = \alpha I_3$$

soit

$$C(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = \alpha I_3$$

soit

$$C \times \frac{1}{\alpha}(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = I_3.$$

Ainsi la matrice est inversible et son inverse vaut :

$$C^{-1} = \frac{1}{\alpha}(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & 0 \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Supposons que $\alpha = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que C est inversible. On a alors :

$$C(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = 0_3.$$

Or comme C est inversible, cela implique que : $C^2 - \gamma C - \beta I_3 = 0_3$ soit

$$C^2 = \gamma C + \beta I_3 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\gamma \\ \gamma & \beta & \gamma\beta \\ 0 & \gamma & \gamma^2 + \beta \end{pmatrix}$$

En identifiant avec les coefficients de C^2, on obtient notamment $1 = 0$, ce qui est absurde donc C n'est pas inversible.

10 Exercice 15

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$
\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ x & - & y & & & = & b \\ -x & + & 2y & + & z & = & c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ & & y & + & z & = & b + c \\ -x & + & 2y & + & z & = & c \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ & & y & + & z & = & b + c \\ & & 6y & + & 5z & = & a + 2c \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ & & y & + & z & = & b + c \\ & & & - & z & = & a - 6b - 4c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ & & y & & & = & a - 5b - 3c \\ & & & & z & = & -a + 6b + 4c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & & & = & 2a - 8b - 6c \\ & y & & = & a - 5b - 3c \\ & & z & = & -a + 6b + 4c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a - 4b - 3c \\ y & = & a - 5b - 3c \\ z & = & -a + 6b + 4c \end{array} \right. \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalement, la matrice A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

11 Exercice 16

1. Pour démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse, on peut soit utiliser l méthode de résolution d'un système linéaire, soit utiliser la méthode de Gauss-Jordan.
   On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow 3L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 2 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 0 & -24 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{-6} L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{-2} L_2} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)
$$

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & -2 \\ -3x & + & 4y & - & 8z & = & 4 \end{array} \right. \iff AX = B \iff X = A^{-1}B$$

Pour trouver la solution du système (S_1), il nous suffit donc de calculer $X = A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système (S_1) est donc $(x; y; z) = (-4; -5; -\frac{3}{2})$.
De même, pour calculer la solution du système (S_2), il nous suffit de faire le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système (S_2) est donc $(x; y; z) = (3; \frac{13}{2}; \frac{7}{4})$.

12 Exercice 20

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,
- si $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = I_2$.
- si $n = 4k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = A$.
- si $n = 4k + 2$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = -I_2$.
- si $n = 4k + 3$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = -A$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Il semblerait que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Démontrons cette proposition par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ».

Initialisation $(n = 1)$:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

par hypothèse de récurrence, on sait que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}+2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}+2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1}+2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-1} & 0 & 2\times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\times 2^{n-1} & 0 & 2\times 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n} & 0 & 2^{n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n} & 0 & 2^{n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \geqslant 1\,, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il semblerait que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrons cette proposition par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation $(n = 1)$:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

par hypothèse de récurrence, on sait que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \geqslant 1\,, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Non corrigé

13 Exercice 21

Montrons ce résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $J^n = 6^{n-1}J$.

Initialisation $(n = 1)$ On a d'une part $J^1 = J$ et d'autre part $6^{1-1}J = J$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n \times J \\ &= 6^{n-1}J \times J \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 6^{n-1}J^2 \end{aligned}$$

Calculons J^2. On obtient $J^2 = 6J$. Ainsi :

$$J^{n+1} = 6^n J.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie à savoir : $J^n = 6^{n-1}J$.

14 Exercice 22

1. Calculons A^2, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On cherche alors deux réels λ et μ tels que :

$$\lambda A + \mu I_3 = A^2$$

soit

$$\begin{pmatrix} \lambda+\mu & -3\lambda & 6\lambda \\ 6\lambda & -8\lambda+\mu & 12\lambda \\ 3\lambda & -3\lambda & 4\lambda+\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient : $\lambda + \mu = 1$ et $6\lambda = -6$. On en déduit que :

$$\lambda = -1 \quad \text{et} \quad \mu = 2.$$

En conclusion, $A^2 = -A + 2I_3$.

2. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$ ».

Initialisation $(n = 0)$, on a d'une part $A^0 = I_3$ par convention. D'autre part, on pose $a_0 = \frac{1}{3}$ et on a :

$$\left(\frac{1}{3} - a_0\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_0\right)I_3 = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A \\
&= \left(\left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3\right) \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A^2 + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) A \\
&= \left(\frac{1}{3} - a_n\right) (-A + 2I_3) + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) A \quad \text{d'après la question 1} \\
&= \left(-\frac{1}{3} + a_n + \frac{2}{3} + a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} - 2a_n\right) I_3 \\
&= \left(\frac{1}{3} - (-2a_n)\right) A + \left(\frac{2}{3} + (-2a_n)\right) I_3
\end{aligned}$$

On pose $a_{n+1} = -2a_n$ et on a alors :

$$A^{n+1} = \left(\frac{1}{3} - (a_{n+1})\right) A + \left(\frac{2}{3} + (a_{n+1})\right) I_3$$

La propriété est alors héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir : il existe une suite $(a_n)_n$ définie par $a_0 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2a_n$ telle que $A^n = \left(\dfrac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\dfrac{2}{3} + a_n\right) I_3$.

3. La suite $(a_n)_n$ est définie par $a_0 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2a_n$. Elle est donc géométrique de raison -2.
4. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{3}(-2)^n$. Ainsi :

$$A^n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right) A + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right) I_3 = \frac{1 - (-2)^n}{3} A + \frac{2 + (-2)^n}{3} I_3$$

soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 + (-2)^n & 2 + (-2)^{n+1} \\ 2 + (-2)^{n+1} & -2 + 3(-2)^n & 4 - 4(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & -1 + (-2)^n & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}$$

15 Exercice 23

1. On a :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^2 = 0_3$$

2. Montrons le résultat par récurrence, on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$ ».

Initialisation $(n = 0)$ On a, d'une part, $A^0 = I_3$ par convention et d'autre part $2^0 I_3 + 0 \times 2^{0-1} B = I_3$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A \\
&= (2^n I_3 + n2^{n-1}B) \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (2^n I_3 + n2^{n-1}B) \times (B + 2I_3) \quad \text{car } B = A - 2I_3 \\
&= 2^n B + n2^{n-1}B^2 + 2^{n+1} I_3 + n2^n B \\
&= 2^{n+1} I_3 + (n+1)2^n B \quad \text{car } B^2 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir : $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$.

16 Exerice 25

1. On applique la méthode de Gauss-Jordan pour prouver que P est inversible et pour déterminer son inverse. On obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. On cherche une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$ comme P est inversible, cela est équivalent à chercher D tel que $D = P^1AP$. Effectuons donc le produit matriciel $P^{-1}AP$, on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

On pose donc la matrice $D = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

3. Montrons le résultat par récurrence. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$.»

Initialisation $(n = 0)$. $A^0 = I_n$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Ainsi $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n\\
&= APD^nP^{-1}, \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= PDP^{-1}PD^nP^{-1}, \quad \text{car } A = PDP^{-1}\\
&= PDI_nD^nP^{-1}\\
&= PD^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Comme la matrice D est diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}4^n & 0 & 0\\ 0 & 6^n & 0\\ 0 & 0 & 8^n\end{pmatrix}$, ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4^n & 0 & 0\\ 0 & 6^n & 0\\ 0 & 0 & 8^n\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n+6^n & -6^n+8^n & -4^n+8^n\\ 4^n-6^n & 6^n+8^n & -4^n+8^n\\ -4^n+6^n & -6^n+8^n & 4^n+8^n\end{pmatrix}$$

17 Exercice 26

1. On applique la méthode de Gauss-Jordan pour prouver que P est inversible et pour déterminer son inverse. On obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 6\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

2. On a :

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Comme D est une matrice diagonale, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$

3. On montre la relation par récurrence (identique à celle de la question 3) de l'exercice 25 (cf corrigé).
   Comme la matrice P est inversible, la relation $D^n = P^{-1}A^nP$ peut s'écrire $A^n = PD^nP^{-1}$. On effectue alors le produit matriciel PD^nP^{-1}. On obtient :

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3+(-1)^n+2^{n+3} & 3+3(-1)^{n+1} & 6+2(-1)^n-2^{n+3} \\ -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} & 3+3(-1)^{n+2} & 6+2(-1)^n-2^{n+2} \\ -3+(-1)^n+2^{n+1} & 3+3(-1)^{n+1} & 6+2(-1)^n-2^{n+1} \end{pmatrix}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons AX_n, on obtient, en utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

   (b) On montre le résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = A^nX_0$ ».
   Initialisation $(n=0)$ On a, par convention, $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= A \times A^nX_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1}X_0 \end{aligned}$$

   La propriété est donc héréditaire.
   Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$X_n = A^nX_0$$

   (c) Pour déterminer l'expression de u_n, on a seulement besoin de calculer le dernier coefficient de X_n.
   On a $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$X_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3+(-1)^n+2^{n+3} & 3+3(-1)^{n+1} & 6+2(-1)^n-2^{n+3} \\ -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} & 3+3(-1)^{n+2} & 6+2(-1)^n-2^{n+2} \\ -3+(-1)^n+2^{n+1} & 3+3(-1)^{n+1} & 6+2(-1)^n-2^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Cela ne sert à rien de faire tout le calcul car seul la ligne 3 de X_n nous intéresse, on obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{6}(3+(-1)^{n+1}-2^{n+1}+3+3(-1)^{n+1}+12+4(-1)^n-2^{n+2}) \\ &= \frac{1}{6}(18+4(-1)^{n+1}-4(-1)^{n+1}-2^{n+1}-2\times 2^{n+1}) \\ &= \frac{1}{6}(18-3\times 2^{n+1}) \\ &= 3-2^n \end{aligned}$$

   En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3-2^n$.