Calcul matriciel

Exercice 1 (♣)

Écrire les matrice suivantes :

$$A = (i - j + 1)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} \qquad B = (\min(i, j))_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 4}}$$

Exercice 2 (♣)

On considère la matrice : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer les matrices :
$X - 2I_3 \qquad -(X - 2I_3)$
$I_3 - 2X \qquad 4(I_3 - X)$

Exercice 3 (♣)

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer et comparer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A + B)^2$.

Exercice 4 (♣)

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible, et dans ce cas donner la dimension de la matrice produit. Lorsque c'est impossible, le justifier.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (♣)

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer le terme situé à l'intersection de la deuxième colonne et de la troisième ligne dans les matrices $A^2 - B^2$, $(A - B)(A + B)$ et $(A + B)(A - B)$.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 (♣)

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Soient E_1, E_2 et E_3 les matrices définies par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AE_1, AE_2 et AE_3.
2. Calculer ${}^tE_1A$, ${}^tE_2A$ et ${}^tE_3A$.

Exercice 7 (♣)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A{}^tA$ puis ${}^tAA$.

Exercice 8 (♣)

1. Soit A une matrice symétrique. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, la matrice A^k est une matrice symétrique.
2. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = A + {}^tA$ est une matrice symétrique.

Exercice 9 (♥)

Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique.
2. Montrer que si X est symétrique, ${}^tAX + XA$ est symétrique.
3. Montrer que si X est antisymétrique, ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 10 (♣)

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 11 (♥)

On note $I = I_3$ et on donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer A^2, puis A^3.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible.
2. (a) Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.
   (b) En déduire que $I - A$ est inversible et donner son inverse.
3. Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 12 (♥)

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?

Exercice 13 (♥)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $-A^3 - 3A^2 - 3A$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^3 - A$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Exercice 14 (♥♦)

Soient α, β et γ trois réels. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $C^3 - \gamma C^2 - \beta C - \alpha I_3 = 0_3$.
2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, alors C est inversible. Donner son inverse.
3. Montrer que si $\alpha = 0$ alors C n'est pas inversible.

Exercice 15 (♣)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16 (♥)

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -3x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ -3x + 4y - 8z = 4 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ -3x + 4y - 8z = 3 \end{cases}$$

Exercice 17 (♠)

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice A_m est inversible et calculer A_m^{-1} pour ces valeurs, où A_m est donnée par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (♠♠)

Lemme d'Hadamard

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice carré d'ordre n à coefficients réels telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

On dit que A est une matrice à diagonale strictement dominante.

Montrer que la matrice A est inversible.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0$.

Exercice 19 (♠♠)

Soit la matrice $B = (\min(i, j))_{1 \leq i,j \leq n}$ i.e. la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tMM$.
2. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 20 (♥)

Dans chacun des cas suivants, calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 21 (♥)

On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad J^n = 6^{n-1} J$$

Exercice 22 (♥♠)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels λ et μ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.
2. Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que :
$$A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3$$
3. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 23 (♥)

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 2I_3$$

1. Calculer B et B^2.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} B$$

Exercice 24 (♠)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que la suite (a_n) est arithmético géométrique.
3. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 25 (♥)

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n.

Exercice 26 (♥)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D. En déduire D^n.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n.
4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

♣ Du trêfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !