

Systèmes linéaires

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 23 (♠♦)

On cherche à résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel a , le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2, \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2, \\ x + y + z &= 1 - a. \end{cases}$$

Indication 1. Avant de se lancer dans un pivot de Gauss complet, observer que les deux premières équations ont le même coefficient devant x .

Quelle relation obtient-on en soustrayant la première équation à la deuxième ?

Indication 2. La différence des deux premières lignes fait apparaître un facteur dépendant de a .

Il faut donc distinguer le cas où ce facteur est nul du cas où il ne l'est pas.

Indication 3. Dans le cas général, la soustraction permet d'obtenir directement une relation sur $y + z$.

Utiliser ensuite la troisième équation

$$x + y + z = 1 - a$$

pour déterminer x .

Indication 4. Une fois x et $y + z$ connus, revenir dans l'une des deux premières équations.

Vérifier si l'on obtient une information supplémentaire sur y et z séparément, ou seulement une condition de compatibilité sur le paramètre a .

Indication 5. Pour chaque valeur particulière de a mise à part au cours du raisonnement, reprendre le **système initial**.

Il faut alors déterminer soigneusement s'il possède :

- aucune solution ;
- une unique solution ;
- ou une infinité de solutions.

Conseil. À la fin, présenter la réponse en distinguant clairement les différentes valeurs du paramètre a et, lorsqu'il y a une infinité de solutions, donner un paramétrage de l'ensemble des solutions.