Correction partielle du TD 5 : Systèmes linéaires

Table des matières

1 Exercice 6

Je commence par isoler x dans la première équation :

$$2x = 1 - 3y \iff x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y.$$

Puis je remplace x par cette expression dans la seconde équation :

$$5 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y\right) + 7y = 3 \iff \frac{5}{2} - \frac{15}{2}y + 7y = 3 \iff -\frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \iff y = -1.$$

Et je retrouve la valeur de x grâce à ma première équation :

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $(2, -1)$.

2 Exercice 7

Je constate que tous les coefficients de L_1 sont des multiples de 2 et tous ceux de L_2, des multiples de 3. En factorisant L_1 par 2 et L_2 par 3, je découvre que les deux lignes de ce système sont en fait équivalentes à la même équation :

$$x + 2y = 5.$$

Ainsi je peux ne garder que cette équation, qui possède une infinité de solutions. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, si je fixe x tel que

$$x + 2y = 5 \iff x = 5 - 2y,$$

alors le couple (x, y) est solution du système. Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(5 - 2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

3 Exercice 8

Je commence par isoler y dans la première équation :

$$-2y = 5 - 4x \iff y = 2x - \frac{5}{2}.$$

Puis je remplace y par cette expression dans la seconde équation :

$$-6x + 3 \times \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 1 \iff -6x + 6x - \frac{15}{2} = 1 \iff -\frac{15}{2} = 1.$$

Cette équation n'est évidemment pas vraie ! Cela signifie que le système de départ n'admet aucune solution réelle. Ainsi $\mathcal{S} = \emptyset$.

4 Exercice 10

Je vais utiliser la méthode du pivot de Gauss. Mais avant tout, je remarque que les deux premières lignes se ressemblent. À l'aide des opérations élémentaires, je vais me ramener à une équation plus simple pour L_2 en lui retirant L_1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & 8z & = & 4 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & & & & 10z & = & -1 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

En x : $2 - 2 = 0$, en y : $3 - 3 = 0$, en z : $8 - (-2) = 10$ et pour le terme constant : $4 - 5 = -1$.
À ce moment, j'ai déjà fait disparaître deux coefficients de mon système. En passant cette ligne en dernière position, il ne me restera plus qu'un terme à faire disparaître pour obtenir un système triangulaire.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & & & & 10z & = & -1 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 10z & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Pour faire disparaître le terme en x de la deuxième ligne, il me suffit de retirer $2L_1$ à L_2.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 10z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & & -7y & + & 8z & = & -10 \\ & & & & 10z & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

En x : $4 - 2 \times 2 = 0$, en y : $-1 - 2 \times 3 = -7$, en z : $4 - 2 \times (-2) = 8$ et enfin : $0 - 2 \times 5 = -10$.
Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.
La troisième équation me donne

$$z = -\frac{1}{10}.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$-7y - \frac{8}{10} = -10 \iff -7y = -10 + \frac{4}{5} = -\frac{46}{5} \iff y = \frac{46}{35}.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$2x + \frac{3 \times 46}{35} + \frac{2}{10} = 5 \iff 2x + \frac{138 + 7}{35} = 5 \iff 2x = 5 - \frac{29}{7} = \frac{6}{7} \iff x = \frac{3}{7}.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $\left(\frac{3}{7}, \frac{46}{35}, -\frac{1}{10}\right)$.

5 Exercice 11

J'applique la méthode du pivot de Gauss.
J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2, il me suffit de retirer L_1 à L_2.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & -2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Pour L_3, de la même manière, je retire L_1 à L_3.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & -2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & -2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

À ce moment, avant de fixer mon pivot en y à la deuxième ligne, je remarque qu'en ajoutant L_3 à L_2, j'obtiens un coefficient égal à 1 pour mon pivot, ce qui est préférable.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & -2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

Enfin, pour obtenir un système triangulaire, je n'ai plus qu'à faire disparaître le terme en y de la troisième ligne : je retire donc $3L_2$ à L_3.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & -7z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

Dès lors, comme mon système est triangulaire, je sais qu'il existe une unique solution. Comme mon système de départ est homogène, je savais déjà que la solution $(0, 0, 0)$ était solution. Maintenant je sais aussi qu'il s'agit de l'unique solution. La résolution habituelle du système triangulaire me donne d'ailleurs $z = 0$, puis $y = 0$ et enfin $x = 0$. Ainsi

$$\mathcal{S} = \big\{ (0, 0, 0) \big\}.$$

6 Exercice 12

J'applique la méthode du pivot de Gauss.
J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2, il me suffit de retirer L_1 à L_2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Pour L_3, de la même manière, je retire L_1 à L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \\ & & -y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

Avant de fixer mon pivot en y à la deuxième ligne, je remarque que le coefficient en y sur la troisième ligne est plus petit. J'échange donc ces deux lignes.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \\ & & -y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & -y & - & z & = & -2 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Pour simplifier les calculs, je retire le « $-$ » de mon deuxième pivot en remplaçant L_2 par $-L_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & -y & - & z & = & -2 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

Enfin, pour obtenir un système triangulaire, je n'ai plus qu'à faire disparaître le terme en y de la troisième ligne : j'ajoute donc $2L_2$ à L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & -2y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & -z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.
La troisième équation me donne

$$z = 0.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y + 0 = 2 \iff y = 2.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 2 + 2 \times 0 = 5 \iff x = 5 - 2 = 3.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $(3, 2, 0)$.

7 Exercice 13

J'applique la méthode du pivot de Gauss.
J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2, il me suffit de retirer L_1 à L_2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Pour retirer le terme en x de L_3, de manière similaire, je retire $2L_1$ à L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

J'ai mon pivot en y sur la deuxième ligne, il ne me reste plus qu'à ajouter L_2 à L_3 pour obtenir un système triangulaire.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & & & & -4z & = & -8 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.
La troisième équation me donne

$$z = \frac{-8}{-4} = 2.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y - 2 = -2 \iff y = -2 + 2 = 0.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 0 + 2 \times 2 = 3 \iff x = 3 - 4 = -1.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $(-1, 0, 2)$.

8 Exercice 14

J'applique la méthode du pivot de Gauss.
J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2, c'est déjà fait. Pour L_3, il me suffit de retirer L_1 à L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & -y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & -y & + & 2z & = & 2 \\ & & -2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

Pour simplifier les calculs, je retire le « $-$ » de mon deuxième pivot en remplaçant L_2 par $-L_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & -y & + & 2z & = & 2 \\ & & -2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \\ & & -2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

J'ai mon pivot en y sur la deuxième ligne, il ne me reste plus qu'à ajouter $2L_2$ à L_3 pour obtenir un système triangulaire.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \\ & & -2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \\ & & & & -6z & = & -4 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.
La troisième équation me donne

$$z = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y - 2 \times \frac{2}{3} = -2 \iff y = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 2 \times \frac{2}{3} = 1 \iff x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

9 Exercice 19

On applique le pivot de Gauss pour échelonner le système. Il faut faire attention ici car le paramètre k peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On commence donc par échanger L_1 et L_2 pour avoir un pivot non nul. On échelonne ensuite le système suivant :

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases}$$

On effectue ensuite $L_2 \leftarrow kL_1 - L2$. On peut remarquer que si $k = 0$, cette opération revient à multiplier L_2 par -1 ce qui ne nous fait pas perdre l'équivalence, on a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x + ky = 1 \\ (k^2-1)y = k-1 \end{cases}$$

Or $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, ce terme s'annule donc pour $k = 1$ ou $k = -1$ et nous devons effectuer une disjonction de cas :

Cas 1 Si $k = 1$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a un système échelonné donc la solution est : $\mathcal{S} = \{(1-y, y),\, y \in \mathbb{R}\}$.

Cas 2 Si $k = -1$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Le système n'a alors pas de solutions : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Cas 3 Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a alors $k^2 - 1 \neq 0$ et on peut diviser par ce terme, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + ky = 1 \\ y = \dfrac{k-1}{k^2-1} = \dfrac{1}{k+1} \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire et possède une unique solution, on a :

$$x = 1 - k \times \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k+1} \right) \right\}$.

10 Exercice 20

On commence par échelonner le système en utilisant le pivot de Gauss. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ y + (2-3k)z = k-6 \\ y + (-1-2k)z = -3 \end{cases}$$

On effectue ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ y + (2-3k)z = k-6 \\ (-3+k)z = 3-k \end{cases}$$

On a alors deux cas :

Cas 1 Si $k = 3$ alors le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 7z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a alors un système échelonné avec deux inconnues principales et une inconnue secondaire, on a donc **une infinité de solutions.**

Cas 2 Si $k \neq 3$, on a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ y + (2-3k)z = k-6 \\ z = -1 \end{cases}$$

Le système est alors de Cramer et le système possède donc **une unique solution.**

11 Exercice 21

On commence par échelonner le système en utilisant le pivot de Gauss. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (a-1)y + 4z = 1 \end{cases}$$

On effectue ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_2$. On remarque que si $a - 1 = 0$, on aura rien fait et donc l'équivalence n'est pas perdue. On obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ + (4-(a+2)(a-1))z = 1-(a-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (-a^2 - a + 6)z = 2 - a \end{cases}$$

Pour déterminer le nombre de solutions de ce système, on doit résoudre : $-a^2 - a + 6 = 0$. On calcule le discriminant et les racines et on obtient : $-a^2 - a + 6 = -(a-2)(a+3)$. On doit donc distinguer trois cas :

Cas 1 Si $a = 2$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a alors un système échelonné avec deux inconnues principales et une inconnue secondaire, on a donc **une infinité de solutions.**

Cas 2 Si $a = -3$, le système devient :

$$(S) \iff \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + -z = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

Le système n'a **aucune solution.**

Cas 3 Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (-a^2 - a + 6)z = 2 - a \end{cases}$$

On a un système de Cramer (car tous les pivots sont non nuls), il possède donc une **unique solution.**

12 Exercice 22

On commence par échelonner le système en utilisant le pivot de Gauss. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - kL_1$. On obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + kz = 1 \\ (k-1)y + (1-k)z = 0 \\ (1-k)y + (k-k^2)z = 1-k \end{cases}$$

On fait ensuite : $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$, on a :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + kz = 1 \\ (k-1)y + (1-k)z = 0 \\ (1-k^2)z = 1-k \end{cases}$$

Comme $1 - k^2 = (1-k)(1+k)$, on distingue trois cas.

Cas 1 Si $k = 1$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a alors : $\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z),\, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

Cas 2 Si $k=-1$, le système devient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ & & (k-1)y & + & (1-k)z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

On a alors $\mathcal{S}=\emptyset$.

Cas 3 Si $k \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $1-k^2 \neq 0$ et le système devient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ & & (k-1)y & + & (1-k)z & = & 0 \\ & & & & z & = & \dfrac{1-k}{1-k^2}=\dfrac{1}{k+1} \end{array}\right.$$

L_2 donc $y=z$ donc $y=\dfrac{1}{k+1}$. Avec L_1, on en déduit x :

$$x=1-y-kz=1-\frac{1}{k+1}-\frac{k}{k+1}=\frac{k+1-1-k}{k+1}=0.$$

On a donc : $\mathcal{S}=\left\{\left(0,\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k+1}\right)\right\}$.

13 Exercice 23

On commence par échelonner le système en utilisant le pivot de Gauss. On effectue $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-kL_1$. On obtient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 3z & = & -3 \\ & & ky & + & 5z & = & 4 \\ & & y & + & 4kz & = & 1+3k \end{array}\right.$$

On échange L_2 et L_3 pour avoir un pivot non nul en y, on a :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 3z & = & -3 \\ & & y & + & 4kz & = & 1+3k \\ & & ky & + & 5z & = & 4 \end{array}\right.$$

On effectue ensuite $L_3 \leftarrow L_3-kL_2$, on a :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & - & 3z & = & -3 \\ & y & + & 4kz & = & 1+3k \\ & & & (5-4k^2)z & = & 4-k(1+3k) \end{array}\right.$$

On résout alors $5-4k^2=0$, on a alors 3 cas :

Cas 1 Si $k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, le système devient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 3z & = & -3 \\ & & y & + & 4kz & = & 1+3k \\ & & & & 0 & = & 4-\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{15}{4} \end{array}\right.$$

On a alors $\mathcal{S}=\emptyset$.

Cas 2 Si $k=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, le système devient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 3z & = & -3 \\ & & y & + & 4kz & = & 1+3k \\ & & & & 0 & = & 4+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{15}{4} \end{array}\right.$$

On a alors $\mathcal{S}=\emptyset$.

Cas 3 Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x \quad - \quad 3z = -3 \\ y + 4kz = 1+3k \\ z = \dfrac{4-k-3k^2}{5-4k^2} \end{cases}$$

On a alors :

$$y = 1+3k-4kz = 1+3k-4k \times \frac{4-k-3k^2}{5-4k^2} = \frac{(1+3k)(5-4k^2)-16k+4k^2+12k^3}{5-4k^2} = \frac{5-k}{5-4k^2}.$$

On peut alors en déduire x :

$$x = -3+3z = -3+3\times\frac{4-k-3k^2}{5-4k^2} = \frac{-3-3k+3k^2}{5-4k^2}.$$

On a donc : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-3-3k+3k^2}{5-4k^2}, \frac{5-k}{5-4k^2}, \frac{4-k-3k^2}{5-4k^2} \right\} \right)$.