

Fonctions usuelles

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 8

On cherche à résoudre, suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation

$$mx^2 + (2m - 1)x - 2 = 0.$$

Indication 1. Attention : il ne faut pas commencer immédiatement par calculer un discriminant.

Le coefficient de x^2 dépend de m . Il faut donc distinguer le cas où l'équation est effectivement du second degré du cas où elle ne l'est pas.

Indication 2. Traiter séparément le cas

$$m = 0.$$

Indication 3. Supposer maintenant $m \neq 0$ et calculer le discriminant Δ de l'équation.

Essayer de factoriser l'expression obtenue plutôt que de développer inutilement les calculs.

Indication 4. Étudier le signe de Δ en fonction de m , puis appliquer les résultats usuels sur les équations du second degré.

Exercice 9

On étudie, suivant $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de

$$(m + 3)x^2 - (2m - 1)x + m + 4 = 0.$$

Indication 1. Comme dans l'exercice précédent, commencer par déterminer pour quelle valeur de m le coefficient de x^2 s'annule.

Cette valeur doit être traitée séparément.

Indication 2. Pour les autres valeurs de m , l'équation est du second degré. Calculer son discriminant Δ .

Indication 3. Le nombre de solutions dépend uniquement du signe de Δ : il faut donc résoudre une inéquation en m .

Indication 4. Ne pas oublier de réunir à la fin l'étude du cas particulier et celle du cas général.

L'objectif n'est pas de calculer les solutions, mais seulement d'en déterminer le **nombre**.

Exercice 17

1. On veut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq x \leq x^2 + 1.$$

Indication 1. La première inégalité découle directement de l'hypothèse $x \in \mathbb{R}_+$.

Indication 2. Pour la seconde, étudier

$$x^2 - x + 1.$$

On peut utiliser son discriminant ou compléter le carré.

2. On veut en déduire que

$$0 \leq \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1} \leq 1.$$

Indication 1. Pour $x \geq 0$, tous les termes intervenant dans le quotient sont positifs ou nuls.

Indication 2. Utiliser d'une part le résultat de la question précédente et d'autre part une majoration très simple de e^{-x} lorsque $x \geq 0$.

Indication 3. Essayer de majorer successivement

$$\frac{xe^{-x}}{x^2 + 1}$$

par une expression plus simple, puis par 1.

Exercice 18

1. On veut montrer, pour $x > 1$,

$$x^2 \geq x^2 - 1 \geq (x - 1)^2.$$

Indication 1. La première inégalité est immédiate.

Indication 2. Pour la seconde, étudier la différence

$$x^2 - 1 - (x - 1)^2.$$

Factoriser l'expression obtenue et utiliser $x > 1$.

2. On veut en déduire

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{x - 1}.$$

Indication 1. Les trois membres de l'inégalité précédente sont positifs. On peut donc appliquer la fonction racine carrée.

Indication 2. On obtient ainsi une comparaison entre

$$x, \quad \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad x - 1.$$

Indication 3. Que devient l'ordre lorsque l'on prend les inverses de nombres strictement positifs ?

Exercice 19

On considère

$$\varphi(x) = 2e^{2x} - 2 - 4x.$$

1. **Indication 1.** Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe.

Indication 2. Résoudre

$$\varphi'(x) = 0.$$

On obtient ainsi le point où φ atteint son minimum.

Indication 3. Calculer la valeur de ce minimum.

On doit en particulier obtenir une information sur le signe de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On veut montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$e^{2x} \geq 1 + 2x + 2x^2.$$

Indication 1. Le résultat de la question précédente fournit déjà une première minoration de e^{2x} .

Indication 2. Il reste à obtenir le terme $2x^2$.

Appliquer le résultat de la question 1 non pas à x , mais à un réel bien choisi dépendant de x .

Indication 3. Une autre possibilité consiste à partir de

$$e^{2x} \geq 1 + 2x$$

et à réutiliser cette inégalité pour obtenir une estimation plus précise.

Exercice 20

1. On veut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Indication 1. Introduire la fonction

$$f(x) = x - 1 - \ln(x)$$

sur $]0, +\infty[$.

Indication 2. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.

Indication 3. La fonction f admet un minimum. Déterminer où il est atteint et calculer sa valeur.

2. On veut en déduire

$$(\ln(x))^3 \leq (x - 1)^3.$$

Indication 1. Il n'est pas nécessaire de refaire une étude de fonction.

Indication 2. Quelle est la monotonie de la fonction

$$t \mapsto t^3$$

sur $\mathbb{R}$?

Appliquer cette fonction aux deux membres de l'inégalité obtenue à la question précédente.

Exercice 24 (♠♠)

1. On veut montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$$

Indication 1. Revenir à la définition de la partie entière.

Si

$$n = \lfloor x \rfloor,$$

quelles inégalités vérifient n et x ?

Indication 2. Ajouter 1 aux différents membres de ces inégalités.

Indication 3. Reconnaître alors la définition de $\lfloor x + 1 \rfloor$.

2. On veut généraliser le résultat à

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Indication 1. Comme indiqué dans l'énoncé, commencer par $p \in \mathbb{N}$ et raisonner par récurrence sur p .

Indication 2. Pour l'hérédité, écrire

$$x + (p + 1) = (x + p) + 1$$

et utiliser la première question.

Indication 3. Il reste ensuite à traiter les entiers négatifs.

Si $p < 0$, écrire par exemple

$$p = -q$$

avec $q \in \mathbb{N}$.

Indication 4. Le résultat déjà démontré pour q peut être appliqué à $x - q$:

$$\lfloor (x - q) + q \rfloor = \lfloor x - q \rfloor + q.$$

Simplifier cette égalité.

Exercice 25 (♠♠♠)

On veut montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Indication 1. Poser

$$p = \lfloor x \rfloor.$$

On sait alors que

$$p \leq x < p + 1.$$

Indication 2. Multiplier cette double inégalité par $n > 0$.

On obtient un encadrement de nx entre deux entiers.

Indication 3. Utiliser la définition de $\lfloor nx \rfloor$ pour obtenir un encadrement de ce nombre.

Indication 4. Diviser ensuite par n et chercher à montrer que

$$p \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < p + 1.$$

Indication 5. Conclure à nouveau à l'aide de la définition de la partie entière.

Exercice 30

1. On cherche à résoudre

$$\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Indication 1. Commencer par retrouver sur le cercle trigonométrique les deux angles de $[0, 2\pi[$ dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$.

Indication 2. Ajouter ensuite la périodicité de la fonction sinus pour obtenir toutes les solutions dans $\mathbb{R}$.

Indication 3. Pour les solutions dans $[-\pi, \pi[$, partir de la solution générale et sélectionner uniquement les valeurs appartenant à cet intervalle.

2. On cherche à résoudre

$$2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Indication 1. Poser

$$X = 3x + \frac{\pi}{6}.$$

Résoudre d'abord l'équation trigonométrique obtenue en X .

Indication 2. Ne pas oublier les deux familles de solutions de

$$\cos(X) = \frac{1}{2}.$$

Indication 3. Revenir ensuite à x dans chacune des deux familles.

3. (a) Pour

$$\sin(6x) = 1,$$

commencer par résoudre

$$\sin(X) = 1$$

puis poser $X = 6x$.

Pour les solutions dans $[0, 2\pi[$, traduire directement cette condition en une condition sur l'entier intervenant dans la solution générale.

(b) Pour

$$\cos(nx) = 0,$$

commencer par résoudre

$$\cos(X) = 0.$$

On pourra écrire les solutions sous la forme

$$X = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remplacer ensuite X par nx .

Pour déterminer les solutions dans $]0, \pi[$, traduire

$$0 < x < \pi$$

en un encadrement de k .

Le nombre de valeurs entières de k admissibles donnera le nombre de solutions.

4. Pour les inéquations trigonométriques, travailler d'abord sur le cercle trigonométrique.

Pour $\cos(2x) \leq 0$. Déterminer les angles X pour lesquels

$$\cos(X) \leq 0,$$

puis poser $X = 2x$.

Pour $\sin(x) \geq -\frac{1}{2}$. Commencer par repérer les angles où

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}.$$

Sur quelles parties du cercle le sinus est-il supérieur à cette valeur ?

Exercice 34

On considère

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}.$$

1. **Indication.** Dans le cadre des fonctions usuelles, écrire une puissance réelle sous la forme

$$x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}.$$

Quelles conditions cela impose-t-il sur x ?

2. On veut montrer, pour $x > 0$,

$$\ln(x) \leq x + 1.$$

Indication 1. On connaît une inégalité classique reliant $\ln(x)$ et $x - 1$.

Indication 2. Si cette inégalité n'a pas encore été établie, introduire

$$g(x) = x + 1 - \ln(x)$$

et étudier ses variations.

3. **Indication 1.** Pour dériver f , utiliser l'écriture

$$f(x) = e^{u(x)}$$

avec

$$u(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(x).$$

Indication 2. Calculer soigneusement $u'(x)$, puis factoriser autant que possible.

Indication 3. Comme

$$e^{u(x)} > 0,$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $u'(x)$.

Indication 4. Utiliser l'inégalité de la question précédente pour déterminer ce signe.

Exercice 36 (♥♠)

On veut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Indication 1. On peut distinguer dès le départ les deux intervalles

$$]0, +\infty[\quad \text{et} \quad]-\infty, 0[.$$

Indication 2. Introduire la fonction

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

sur chacun de ces deux intervalles.

Indication 3. Calculer $f'(x)$.

Attention à la dérivée de la fonction composée

$$x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication 4. Simplifier $f'(x)$. Une simplification remarquable doit se produire.

Qu'en déduire sur la fonction f sur chacun des deux intervalles $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$?

Indication 5. Il reste à déterminer les deux constantes obtenues.

Choisir une valeur particulièrement simple de x sur $]0, +\infty[$, puis une valeur particulièrement simple sur $] -\infty, 0[$.

Penser aux valeurs de

$$\arctan(1) \quad \text{et} \quad \arctan(-1).$$