Correction du TD 4 : Fonctions usuelles

Table des matières

1 Exercice 3

1. Les fonctions f et g sont des fonctions polynomiales donc $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$. Aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathbb{R} = D_f$, donc $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$, i.e. $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.
   De même $D_{g\circ f} = D_{f\circ f} = D_{g\circ g} = \mathbb{R}$.
   On détermine maintenant l'expression de ces différentes fonctions.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(3x+2) = 2 \times (3x+2)^2 - (3x+2) \\
&= 2 \times (9x^2 + 12x + 4) - (3x+2) = 18x^2 + 24x + 8 - 3x - 2 = 18x^2 + 21x + 6 \\
g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(2x^2 - x) = 3 \times (2x^2 - x) + 2 = 6x^2 - 3x + 2 \\
f \circ f(x) &= f(f(x)) = f(2x^2 - x) = 2(2x^2 - x)^2 - (2x^2 - x) \\
&= 2(4x^4 - 4x^3 + x^2) - 2x^2 + x = 8x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 2x^2 + x = 8x^4 - 8x^3 + x \\
g \circ g(x) &= g(g(x)) = g(3x+2) = 3(3x+2) + 2 = 9x + 6 + 2 = 9x + 8
\end{aligned}$$

2. La fonction f est une fonction polynomiale donc $D_f = \mathbb{R}$. La fonction g est une fraction rationnelle dont l'unique valeur interdite est 0, donc $D_g = \mathbb{R}^*$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \in \mathbb{R} = D_f$ donc $D_{f\circ g} = \mathbb{R}^*$.
   - Pour déterminer $D_{g\circ f}$, on doit connaître les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \in D_g$, i.e. les $x \in \mathbb{R}$ tels que $1 - x^3 \neq 0$. Or $1 - x^3 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$. Donc $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_{f\circ f} = \mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ donc $D_{g\circ g} = \mathbb{R}^*$.

   On détermine maintenant l'expression de ces différentes fonctions.
   - Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 1 - \frac{1}{x^3}$$
   - Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1 - x^3) = \frac{1}{1 - x^3}$$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1 - x^3) = 1 - (1 - x^3)^3$$
   - Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :
$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \times \frac{x}{1} = x$$

3. La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 2x + 3$. Pour déterminer D_f, on doit donc résoudre $2x + 3 \geqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}$:
$$2x + 3 \geqslant 0 \quad \iff \quad 2x \geqslant -3 \quad \iff \quad x \geqslant -\frac{3}{2}.$$
   Donc $D_f = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. La fonction g est une fonction polynomiale donc $D_g = \mathbb{R}$.
   - Pour déterminer $D_{f\circ g}$, on doit savoir pour quel $x \in D_g = \mathbb{R}$,
   $g(x) \in D_f = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
   Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2 > 0$, donc pour tout $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$. Donc $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$, $f(x) \in \mathbb{R} = D_g$, donc $D_{g\circ f} = [-\dfrac{3}{2}, +\infty[$.
   - Pour tout $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$, $f(x) = \sqrt{2x+3} \geqslant 0$, i.e. $f(x) \in D_f$.

   Donc $D_{f\circ f} = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathbb{R}$, donc $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$.

   On détermine maintenant l'expression de ces différentes fonctions.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{2(x^2 + 2) + 3} = \sqrt{2x^2 + 4 + 3} = \sqrt{2x^2 + 7}$$

- Soit $x \in [-\frac{3}{2}, +\infty[$. On a :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x+3}) = \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 2 = 2x+3+2 = 2x+5$$

- Soit $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$. On a :

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{2x+3}) = \sqrt{2\sqrt{2x+3}+3}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2+2) = (x^2+2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 4 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$$

2 Exercice 6

1. La fonction $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut donc résoudre $|x-1| > 0$ et $|x+1| > 0$ pour déterminer le domaine de définition de f. On a :

$$|x-1| > 0 \iff x \neq 1 \quad \text{et} \quad |x+1| > 0 \iff x \neq -1$$

   Ainsi f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0 donc on peut étudier la parité de cette fonction. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a :

$$f(-x) = -x + \ln|-x-1| - \ln|-x+1| = -x + \ln|x+1| - \ln|x-1| = -f(x)$$

   car la fonction valeur absolue est paire. Ainsi la fonction f est impaire.
2. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$. Ainsi la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
   Le domaine de définition de g est symétrique par rapport à 0 donc on peut étudier la parité de cette fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(-x) = -x\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1} = -x\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1} = -x \times \frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = -x\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = x\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = g(x).$$

   La fonction g est donc paire.
3. La fonction h est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$.
   Le domaine de définition de g est symétrique par rapport à 0 donc on peut étudier la parité de cette fonction. On remarque que :

$$h(1) = 3 \quad \text{et} \quad h(-1) = 1.$$

   On a donc :

$$h(-1) \neq h(1) \quad \text{et} \quad h(-1) \neq -h(1).$$

   La fonction h n'est ni paire, ni impaire.
4. La fonction $x \mapsto 5x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\cos$ aussi donc par composée $x \mapsto \cos(5x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, résolvons donc $1 - x^2 > 0$. On a alors :

$$1 - x^2 > 0 \iff x \in]-1, 1[.$$

   Ainsi par composée, la fonction i est définie sur $]-1, 1[$.
   Le domaine de définition de i est symétrique par rapport à 0 donc on peut étudier la parité de cette fonction. Soit $x \in]-1, 1[$, on a :

$$i(-x) = \cos(-5x) - \ln(1-(-x)^2) = \cos(5x) - \ln(1-x^2) = i(x)$$

   car $\cos$ et la fonction carré sont paires. Ainsi la fonction i est paire.

3 Exercice 8

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E_0) &\iff -x^2+2=0 \\ &\iff x^2=2 \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E_1) &\iff 2x+3=0 \\ &\iff x=\frac{-3}{2} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$.
2. On résout ici une équation en m :
$$\begin{aligned} 0 \text{ solution de } (E_m) &\iff (m-1)0^2+2m\times 0+m+2=0 \\ &\iff m=-2 \end{aligned}$$
Ainsi, la seul valeur de m telle que 0 soit solution de (E_m) est -2. L'équation (E_{-2}) s'écrit $-3x^2-4x=0$, c'est-à-dire $-x(3x+4)=0$. Elle admet donc une autre solution qui est $\frac{-4}{3}$.
3. (E_m) est une équation du second degré, son nombre de solutions dépend donc du signe de son discriminant Δ_m.
$$\begin{aligned} \Delta_m &= (2m)^2-4(m-1)(m+2) \\ &= 4m^2-4m^2+4m-8m+8 \\ &= 8-4m \end{aligned}$$
Ainsi, si $m>2$, l'équation (E_m) n'a pas de solution, si $m=2$, elle n'en a qu'une et si $m<2$, elle admet exactement deux solutions distinctes.

4 Exercice 12

1. $$\begin{aligned} \ln(x+4)=2\ln(x+2) &\iff \ln(x+4)=\ln\left((x+2)^2\right) \iff \ln(x+4)=\ln(x^2+4x+4) \\ &\iff x+4=x^2+4x+4 \iff x^2+3x=0 \iff x(x+3)=0 \\ &\iff x=0 \text{ ou } x+3=0 \iff x=0 \text{ ou } x=-3 \end{aligned}$$
Je ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I=]-2,+\infty[$, ainsi
$$\mathcal{S}=0.$$
2. $$\begin{aligned} \ln(x+3)+\ln(x+1)=\ln(x+13) &\iff \ln\left((x+3)(x+1)\right)=\ln(x+13) \\ &\iff \ln(x^2+4x+3)=\ln(x+13) \\ &\iff x^2+4x+3=x+13 \\ &\iff x^2+3x-10=0 \end{aligned}$$
Je calcule alors le discriminant : $\Delta=3^2-4\times 1\times(-10)=9+40=49=7^2>0$.
Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{-3-7}{2}=-5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-3+7}{2}=2.$$
Je ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I=]-1,+\infty[$, ainsi
$$\mathcal{S}=2.$$
3. $$\begin{aligned} \ln(3x-1)-\ln(x)=\ln(2) &\iff \ln(3x-1)=\ln(2)+\ln(x) \iff \ln(3x-1)=\ln(2x) \\ &\iff 3x-1=2x \iff x-1=0 \iff x=1 \end{aligned}$$
De plus, 1 est bien dans l'intervalle $I=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, donc l'unique solution de l'équation est
$$x=1.$$
4. $\ln(x)=1 \iff \ln(x)=\ln(\mathrm{e}) \iff x=\mathrm{e}$
De plus, e est bien dans l'intervalle $I=]0,+\infty[$, donc l'unique solution de l'équation est
$$x=\mathrm{e}.$$

5 Exercice 13

1. $\ln(x-2) \leqslant 0 \iff \ln(x-2) \leqslant \ln(1) \iff x-2 \leqslant 1 \iff x \leqslant 3$
   Il faut donc que $x \leqslant 3$ et que x soit dans l'intervalle $I =]2, +\infty[$, donc
   $$\mathcal{S} = \left]2, 3\right].$$
2. $\ln(x-3) \geqslant 1 \iff \ln(x-3) \geqslant \ln(\mathrm{e}) \iff x-3 \geqslant \mathrm{e} \iff x \geqslant \mathrm{e}+3$
   Il faut donc que $x \geqslant \mathrm{e}+3$ et que x soit dans l'intervalle $I =]3, +\infty[$, donc
   $$\mathcal{S} = \left[\mathrm{e}+3, +\infty\right[.$$
3. $$\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant 0 \iff \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant \ln(1) \iff \frac{2x+1}{x+1} \leqslant 1$$
   $$\iff 2x+1 \leqslant x+1 \iff x \leqslant 0$$
   Il faut donc que $x \leqslant 0$ et que x soit dans l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc
   $$\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}, 0\right].$$

6 Exercice 14

1. $A = (e^x)^2 - \dfrac{1}{e^{-2x}} = e^{2x} - e^{-(-2x)} = e^{2x} - e^{2x} = 0$
2. $B = \big(e^x + e^{-x}\big)^2 - \big(e^x - e^{-x}\big)^2 = (e^x)^2 + 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 - \big((e^x)^2 - 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2\big)$
   $= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} = 4$
3. $C = e^{-x}\left(e^{2x} - \dfrac{1}{e^x}\right) = e^{-x} \times e^{2x} - \dfrac{e^{-x}}{e^x} = e^x - e^{-2x}$
4. $D = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}} = e^{(2x+1)-(1-x)} = e^{2x+x+1-1} = e^{3x}$
5. $E = \dfrac{\big(e^{x+2}\big)^2}{e^{2x-1}} = e^{2\times(x+2)-(2x-1)} = e^{2x+4-2x+1} = e^5$
6. $F = \ln\left(e^{2x+1} \times e^{2-x}\right) = \ln\left(e^{(2x+1)+(2-x)}\right) = \ln\left(e^{x+3}\right) = x+3$
7. $G = \dfrac{e^{2x+\ln(2)}}{e^{-x}} = e^{2x+\ln(2)-(-x)} = e^{2x+x} \times e^{\ln(2)} = e^{3x} \times 2 = 2e^{3x}$
8. $H = \dfrac{e^{x+\ln(8)}}{e^{x-\ln(2)}} = e^{\left(x+\ln(8)\right)-\left(x-\ln(2)\right)} = e^{\ln(8)+\ln(2)} = e^{\ln(8)} \times e^{\ln(2)} = 8 \times 2 = 16$

7 Exercice 15

1. $\mathrm{e}^{x^2+x-1} = 1 \iff \mathrm{e}^{x^2+x-1} = \mathrm{e}^0 \iff x^2+x-1 = 0$
   Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Je calcule le discriminant :
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$. Il y a donc 2 racines :
   $$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$
   D'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
2. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \iff 2\big(e^x\big)^2 - e^x - 1 = 0$
   Je reconnais une équation de degré deux en la variable e^x. Je pose donc $X = e^x$. Alors
   $$2\big(e^x\big)^2 - e^x - 1 = 0 \iff 2X^2 - X - 1 = 0.$$

Je résous cette équation polynomiale de degré 2 en X. Je calcule le discriminant :
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$. Il y a donc 2 racines :

$$X_1 = \frac{1-3}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Ainsi l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ est vérifiée pour $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 1$.

Donc l'équation $2\big(e^x\big)^2 - e^x - 1 = 0$ est vérifiée pour $e^x = -\dfrac{1}{2}$ et $e^x = 1$.

Comme une exponentielle est toujours positive, la première équation $e^x = -\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions en x. En revanche $e^x = 1$ admet une solution donnée par $x = \ln(1) = 0$.
D'où $\mathcal{S} = \big\{0\big\}$.

3. Cette équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x+1} > 0$. Puis
$$\begin{aligned} \ln\left(e^{x+1}\right) = e^{x+1} + x &\iff x + 1 = e^{x+1} + x \iff e^{x+1} = 1 = e^0 \\ &\iff x + 1 = 0 \iff x = -1. \end{aligned}$$
D'où $\mathcal{S} = \big\{-1\big\}$.

4. Cette équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1$ et $e^{1-x^2} > 0$. Puis
$$\begin{aligned} e^{\ln\left(x^2+1\right)} - \ln\left(e^{1-x^2}\right) = \frac{1}{2} &\iff \left(x^2+1\right) - \left(1 - x^2\right) = \frac{1}{2} \iff 2x^2 = \frac{1}{2} \\ &\iff x^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$
Alors $x = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$. D'où $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

5. Cette équation n'est définie que pour $x \in \left]0, +\infty\right[$ en raison de la présence du terme $\ln(x)$.
$$\begin{aligned} \ln\left(e^{-x}\right) + e^{-\ln(x)} = 0 &\iff -x + \frac{1}{e^{\ln(x)}} = 0 \iff -x + \frac{1}{x} = 0 \\ &\iff \frac{-x^2+1}{x} = 0 \iff -x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = 1 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$
En effet, comme l'équation n'est définie que pour les réels strictement positifs, l'unique solution de $x^2 = 1$ est $x = 1$.
D'où $\mathcal{S} = \big\{1\big\}$.

8 Exercice 16

1. Cette équation n'est définie que pour $x \in \mathbb{R}^*$ en raison de la présence du terme $\dfrac{1}{x}$.

   Puis $\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \geqslant \mathrm{e} \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \geqslant \mathrm{e}^1 \iff \dfrac{1}{x} \geqslant 1$

   Arrivé à ce moment, je dois réfléchir selon le signe de x :
   - si x est négatif, alors $\dfrac{1}{x}$ l'est aussi, donc l'équation $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$ n'est jamais vérifiée,
   - si x est positif, je peux multiplier par x et j'obtiens que $1 \geqslant x$, donc que $x \in \big]0, 1\big[$.

   D'où $\mathcal{S} = \big]0, 1\big[$.

2. $\mathrm{e}^{2x} \leqslant e^x \iff \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{2x-x} \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^0 \iff x \leqslant 0$
   D'où $\mathcal{S} = \big]-\infty, 0\big]$.

3. $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^2} < 1 \iff \mathrm{e}^{2x+x^2} < \mathrm{e}^0 \iff x^2 + 2x < 0 \iff x(x+2) < 0$
   J'établis alors le tableau de signe du produit $x(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

J'en conclus donc que les solutions de l'équation se situent entre -2 et 0, ie $\mathcal{S} = \left] -2, 0 \right[$.

4. $e^{x^2-10x+21} \geqslant 1 \iff e^{x^2-10x+21} \geqslant e^0 \iff x^2 - 10x + 21 \geqslant 0$
Il s'agit d'une inéquation polynomiale de degré 2. Je calcule le discriminant :
$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16 = 4^2 > 0$. Il y a donc 2 racines :

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+4}{2} = 7.$$

J'établis alors le tableau de signe de $x^2 - 10x + 21$:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

J'en conclus donc que les solutions de l'équation se situent avant 3 et après 7,

$$ie \quad \mathcal{S} = \left] -\infty, 3\right] \cup \left[7, +\infty\right[.$$

9 Exercice 24

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lfloor 3x - 1 \rfloor = 7 &\iff 7 \leqslant 3x - 1 < 8 \\ &\iff \frac{8}{3} \leqslant x < 3 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \left[\frac{8}{3}, 3\right[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 5\lfloor -4x + 1 \rfloor^2 = 9 &\iff \sqrt{5}|\lfloor -4x + 1 \rfloor| = 3 \\ &\iff \lfloor -4x + 1 \rfloor = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad \lfloor -4x + 1 \rfloor = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Or, $\lfloor -4x + 1 \rfloor$ est entier, donc l'équation n'a pas de solutions.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par analyse-synthèse :

Analyse : Supposons que $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$.
Alors, $|2x + 3 - (x + 2)| < 1$, c'est à dire $|x + 1| < 1$. Donc $x \in]-2; 0[$.

Synthèse : Nous allons distinguer les cas selon les valeurs possibles de $\lfloor 2x + 3 \rfloor$

(a) Si $x \in]-2; \frac{-3}{2}[$, alors $2x + 3 \in]-1; 0[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = -1$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 0$, donc x n'est pas solution.

(b) Si $x \in [-\frac{3}{2}; -1[$, alors $2x + 3 \in [0; 1[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 0$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 0$, donc x est solution.

(c) Si $x \in [-1; \frac{-1}{2}[$, alors $2x + 3 \in [1; 2[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 1$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 1$, donc x est solution.

(d) Si $x \in [\frac{-1}{2}; 0[$, alors $2x + 3 \in [2; 3[$, donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 2$. $\lfloor x + 2 \rfloor = 1$, donc x n'est pas solution.

Finalement, $\mathcal{S} = \left[\frac{-3}{2}; \frac{-1}{2}\right[$.

10 Exercice 31

1. On a, en mettant au même dénominateur :
$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$
On utilise ensuite les formules de trigonométrie pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, on a :
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2. On a :
$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$$
or $\cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$ donc $\sin(a)^2 = 1 - \cos(a)^2$, ainsi :
$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - (1 - \cos(a)^2) = 2\cos(a)^2 - 1.$$
On en déduit que :
$$\cos(a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}.$$
En utilisant cette formule, on a :
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$
On a bien : $\frac{2+\sqrt{2}}{4} \geqslant 0$ donc
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$
Or $\frac{\pi}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$, ainsi :
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

11 Exercice 34

1. (a) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :
$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$
On sait que $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, ainsi $f'(x) \geqslant 0 \iff -2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$.
La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Comme a fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet un maximum en 0 qui vaut $f(0) = 1$.

2. (a) Commençons par déterminer le domaine de définition de la fonction g. La fonction $x\ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi la fonction g est définie et dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Calculons sa dérivée pour étudier ses variations. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \ln(x) - \sqrt{x} \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x}(\ln(x))^2}.$$

Pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $2\sqrt{x}(\ln(x))^2 > 0$, ainsi le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $\ln(x) - 2$. Résolvons cette inéquation :

$$\ln(x) - 2 \leqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 2 \iff x \leqslant \mathrm{e}^2 \quad \text{car } x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$\mathrm{e} \simeq 2,7$ donc $\mathrm{e}^2 > 1$, ainsi on a le tableau de variations suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	$\searrow$	‖	$\searrow$	$g(\mathrm{e}^2)$	$\nearrow$	

(b) L'étude des variations de g nous permet d'affirmer que la fonction g possède un minimum sur $]1,+\infty[$ atteint en e^2 et qui vaut $g(\mathrm{e}^2) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^2}}{\ln(\mathrm{e}^2)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

12 Exercice 38

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x\arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée puis somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a pour tout réel x non nul, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ qui sont tous les deux des intervalles.
On a pour $x > 0$,

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

puis, f étant impaire, pour $x < 0$,

$$f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}.$$