Fonctions usuelles

Exercice 1 (♣)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

1. $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}$
2. $f(x)=\ln\left(2(3+x)(4+2x)\right)$
3. $f(x)=\ln(\mathrm{e}^x+1)$
4. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-4}$
5. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$
6. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-4x+3)}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2}}$
7. $f(x)=(1+x)^{2+x}$
8. $f(x)=\dfrac{1}{|x|-1}$

Exercice 2 (♣)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^3-3x^2+1.$$

Déterminer l'ensemble image par f des intervalles suivants :

1. $I=]0;1]$
2. $I=]0;2[$
3. $I=[-1;1[$

Exercice 3 (♣)

Donner le domaine de définition ainsi que l'expression des fonctions : $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ et $g\circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :

1. $f(x)=2x^2-x$ et $g(x)=3x+2$;
2. $f(x)=1-x^3$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$;
3. $f(x)=\sqrt{2x+3}$ et $g(x)=x^2+2$.

Exercice 4 (♣)

Donner le domaine de définition ainsi que l'expression des fonctions $f\circ g\circ h$ pour les fonctions f, g et h définies de la façon suivante :

1. $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$ et $h(x)=x-1$;
2. $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=x^2+2$ et $h(x)=x+3$.

Exercice 5 (♣)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1. Si g est une fonction paire et $h=f\circ g$ alors, h est aussi une fonction paire ;
2. Si g est une fonction impaire et $h=f\circ g$, alors h est aussi une fonction impaire.

Exercice 6 (♥)

Déterminer le domaine de définition puis étudier la parité des fonctions définies par :

1. $f(x)=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|$
2. $g(x)=x\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$
3. $h(x)=x^2+x+1$
4. $i(x)=\cos(5x)-\ln(1-x^2)$

Exercice 7 (♣)

Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques :

1. $f_1(x)=3x-\lfloor 3x+5\rfloor$
2. $f_2(x)=\sin\left(\dfrac{3x}{2}+1\right)$
3. $f_3(x)=\lfloor 3-2x\rfloor+2x$
4. $f_4(x)=\sin(2x+5)-\cos(3x+4)$

Exercice 8 (♥)

Soit m un réel et (E_m) l'équation

$$(m-1)x^2+2mx+m+2=0$$

d'inconnue réel x.

1. Résoudre les équations (E_0) et (E_1).
2. Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x=0$ comme solution ? Donner l'éventuelle autre solution.
3. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle :
   (a) une unique solution ?
   (b) deux solutions distinctes ?
   (c) aucune solution réelle ?

Exercice 9 (♠)

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E_m)\qquad mx^2+(2m-1)x-2=0.$$

Exercice 10 (♣)

Donner, en fonction du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation suivante :

$$(m+3)x^2-(2m-1)x+m+4=0.$$

Exercice 11 (♣)

Montrer, sans les calculer, que l'équation

$$5x^2+12x-7=0$$

admet deux solutions x_1 et x_2.

1. Donner les valeurs de x_1+x_2 et de x_1x_2.

2. En déduire la valeur de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
3. Calculer $x_1^2 + x_2^2$.

Exercice 12 (♥)

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $\ln(x+4) = 2\ln(x+2)$ sur $I =]-2; +\infty[$
2. $\ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+13)$ sur $I =]-1; +\infty[$
3. $\ln(3x-1) - \ln x = \ln 2$ sur $I =]\frac{1}{3}; +\infty[$
4. $\ln x = 1$ sur $I =]0; +\infty[$

Exercice 13 (♥)

Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $\ln(x-2) \leq 0$ sur $I =]2; +\infty[$
2. $\ln(x-3) \geq 1$ sur $I =]3; +\infty[$
3. $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

Exercice 14 (♣)

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = (\mathrm{e}^x)^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$$
$$B = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$$
$$C = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$$
$$D = \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$$
$$E = \frac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2}{\mathrm{e}^{2x-1}}$$
$$F = \ln\left(\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{2-x}\right)$$
$$G = \frac{\mathrm{e}^{2x+\ln 2}}{\mathrm{e}^{-x}}$$
$$H = \frac{\mathrm{e}^{x+\ln 8}}{\mathrm{e}^{x-\ln 2}}$$

Exercice 15 (♥)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x^2+x-1} = 1$
2. $2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1 = 0$
3. $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right) = \mathrm{e}^{x+1} + x$
4. $\mathrm{e}^{\ln\left(x^2+1\right)} - \ln\left(\mathrm{e}^{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}$
5. $\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + \mathrm{e}^{-\ln x} = 0$

Exercice 16 (♥)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \geqslant \mathrm{e}$
2. $\mathrm{e}^{2x} \leqslant \mathrm{e}^x$
3. $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^2} < 1$
4. $e^{x^2-10x+21} \geq 1$

Exercice 17 (♣)

Montrer que :

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Exercice 18 (♠)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq x \leq x^2 + 1.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1} \leq 1.$$

Exercice 19 (♠)

Montrer que :

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad x^2 \geq x^2 - 1 \geq (x-1)^2.$$

En déduire que :

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x-1}.$$

Exercice 20 (♠)

Étudier la fonction $\varphi : x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - 2 - 4x$ et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{e}^{2x} \geq 1 + 2x + 2x^2$$

Exercice 21 (♠)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (\ln(x))^3 \leq (x-1)^3.$$

Exercice 22 (♣)

Dans chacun des cas suivants, montrer que :

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq M$$

1. $f : x \mapsto x^2, \quad I = [-2; 3]$ et $M = 6$
2. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 6x, \quad I = [0; \ln(2)]$ et $M = 4$
3. $f : x \mapsto \ln(x) - \frac{2}{3}x, \quad I = [3; +\infty[$ et $M = \frac{2}{3}$

Exercice 23 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = 2$
2. $|x-1| < 2$
3. $|x+1| \geq 2$
4. $|x+1| - |2x+1| = 0$
5. $\left|x^2 - 8x + 11\right| = 4$

Exercice 24 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\lfloor 3x-1 \rfloor = 7$
2. $5\lfloor -4x+1 \rfloor^2 = 9$
3. $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$

Exercice 25 (♠)

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad 1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1.$

Exercice 26 (♠)

Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Exercice 27 (♠)

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$

Exercice 28 (♣)

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction et étudier ses variations.

- $f_1(x) = x + \mathrm{e}^x$
- $f_2(x) = \ln(x) - 1$
- $f_3(x) = \sqrt{x} + 2x$
- $f_4(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$
- $f_5(x) = x^2\mathrm{e}^x$
- $f_6(x) = x\ln(x) - x$
- $f_7(x) = (2x+3)^2$
- $f_8(x) = \ln(x^2+1)$
- $f_9(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+3}}$
- $f_{10}(x) = x^{x^2}$

Exercice 29 (♣)

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction. On ne demande ni le domaine de définition, ni le domaine de dérivabilité de chacune des fonctions.

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$
2. $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
3. $h(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$
4. $i(x)(x) = x^2 + \cos(x)$
5. $j(x) = \sin(2x)$
6. $h(x) = (\sin(x))^2$

Exercice 30 (♣)

Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les nombres suivants :

1. $\sin(3\pi + x)$
2. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$
3. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$
5. $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

Exercice 31 (♥)

1. Vérifier que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire, à l'aide des formules de trigonométrie, la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. Exprimer $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 32 (♠)

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$ l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\sin(6x) = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :
   (a) $2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$,
   (b) $\sin x + \sin(2x) = 0$
   (c) $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = 0$
3. (a) Résoudre dans $]0, \pi[$, l'équation
   $$\cos(5x) = 0.$$
   On précisera le nombre de solutions.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre alors dans $]0, \pi[$, l'équation $\cos(nx) = 0$. On précisera le nombre de solutions.
4. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les inéquations trigonométriques suivantes :
   (a) $\cos(2x) \leq 0$,
   (b) $\sin(x) \geq -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 33 (♣)

Soit f la fonction définie sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \tan(x)\sin(x).$$

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
4. La fonction f admet-elle des extrema ? Préciser.
5. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 34 (♥)

1. (a) Etudier les variations de la fonction
$$f(x) = e^{-x^2}.$$
   (b) En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
2. (a) Etudier les variations de la fonction
$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}.$$
   (b) En déduire que g admet un minimum sur $]1;+\infty[$ que l'on déterminera.

Exercice 35 (♠)

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \ln\left(\frac{3x+1}{3x+5}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $x = 0$.

Exercice 36 (♠)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 37 (♣)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + 2x$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f. On précisera les limites au bord du domaine.

Exercice 38 (♥♠)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0.$$

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !