

Récurrences, sommes et produits

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 6

On cherche à démontrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Indication 1. La présence de l'entier n et de la puissance $(1+x)^n$ suggère de raisonner par **récurrence sur n** .

Indication 2. Vérifier soigneusement l'initialisation pour $n = 0$.

Indication 3. Pour l'hérédité, supposer que

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Comme $x \geq -1$, on a

$$1+x \geq 0.$$

On peut donc multiplier l'inégalité précédente par $1+x$ sans en changer le sens.

Indication 4. Développer

$$(1+nx)(1+x)$$

et comparer le résultat avec

$$1+(n+1)x.$$

Un terme supplémentaire apparaît : quel est son signe ?

Exercice 14

1. On veut montrer

$$2!4! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n.$$

Indication 1. Une récurrence sur n est bien adaptée à la présence des produits dépendant de n .

Indication 2. Dans l'étape d'hérédité, après avoir utilisé l'hypothèse de récurrence, il faut comparer

$$((n+1)!)^n (2n+2)!$$

avec

$$((n+2)!)^{n+1}.$$

Indication 3. Simplifier les facteurs communs. Le problème se ramène à comparer un produit d'entiers consécutifs avec une puissance.

Indication 4. Dans le produit

$$(n+2)(n+3) \cdots (2n+2),$$

combien y a-t-il de facteurs ? Comparer chacun d'entre eux à $n+2$.

2. On veut montrer

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Indication 1. Dans la somme de gauche, séparer les termes correspondant aux indices pairs et aux indices impairs.

Indication 2. Écrire ainsi la somme sous la forme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

Indication 3. Une autre idée consiste à partir de

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et à en retirer convenablement les termes d'indice pair.

Indication 4. Faire apparaître des sommes de la forme

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Réindexer alors la différence obtenue.

Exercice 15

On cherche à montrer

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

Indication 1. Le paramètre p étant fixé, raisonner par **récurrence sur n** .

Indication 2. Pour passer du rang n au rang $n+1$, écrire

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+p}{p} = \sum_{k=0}^n \binom{k+p}{p} + \binom{n+p+1}{p}.$$

Indication 3. Utiliser l'hypothèse de récurrence sur la première somme.

Indication 4. Il ne reste plus qu'à reconnaître la relation de Pascal

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} = \binom{m+1}{r+1}.$$

Exercice 16

On veut montrer

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

Indication 1. Commencer par développer mentalement le produit de gauche : quels sont son premier et son dernier facteur ?

Indication 2. Essayer d'exprimer

$$\prod_{k=1}^n (n+k)$$

à l'aide de factorielles.

Indication 3. Pour le produit de droite, observer que

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n)$$

peut être séparé en un produit des nombres pairs et un produit des nombres impairs.

Indication 4. Écrire donc

$$(2n)! = \left(\prod_{k=1}^n 2k \right) \left(\prod_{k=1}^n (2k-1) \right).$$

Simplifier ensuite le produit des nombres pairs.

Exercice 21

1. On cherche à montrer

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

Indication. Réduire le membre de droite au même dénominateur. Cette première question fournit la décomposition qui sera utile pour calculer la somme suivante.

2. On considère

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Indication 1. Utiliser la décomposition obtenue à la question précédente.

Indication 2. Écrire les premiers et les derniers termes de la somme avant d'essayer de calculer. De nombreux termes vont se simplifier.

Indication 3. On peut également séparer la somme en trois sommes puis effectuer des changements d'indice. Attention aux bornes après chaque changement d'indice.

Exercice 22

On pose

$$a_{i,j} = \min(i, j)$$

pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et on cherche à calculer

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}.$$

Indication 1. Pour comprendre la somme, commencer par écrire le tableau des valeurs de $a_{i,j}$ pour une petite valeur de n , par exemple $n = 4$.

Indication 2. Pour i fixé, étudier

$$\min(i, j)$$

suivant que $j \leq i$ ou $j > i$.

Indication 3. On peut ainsi écrire

$$\sum_{j=1}^n \min(i, j)$$

comme la somme de deux sommes beaucoup plus simples.

Indication 4. Calculer ensuite

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right).$$

Les formules usuelles pour

$$\sum_{i=1}^n i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i^2$$

permettront de terminer.

Exercice 23

1. On considère

$$S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1.$$

Indication 1. Cette somme compte simplement le nombre de couples (i, j) vérifiant

$$1 \leq i < j \leq n.$$

Indication 2. Pour i fixé, combien existe-t-il de valeurs possibles de j ?

Indication 3. On peut donc transformer la somme double en une somme simple.

Une autre méthode consiste à interpréter le résultat à l'aide d'un coefficient binomial.

2. On considère

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{i}{j}.$$

Indication 1. L'ordre actuel des sommations n'est pas le plus pratique.

Essayer d'intervertir les deux sommes.

Indication 2. La condition sur les indices est

$$1 \leq i < j \leq n.$$

Si j est fixé, quelles sont les valeurs possibles de i ?

Indication 3. On obtient une expression de la forme

$$\sum_{j=\dots}^{\dots} \frac{1}{j} \sum_{i=\dots}^{\dots} i.$$

Indication 4. Utiliser alors la formule donnant

$$\sum_{i=1}^m i.$$

Une simplification importante par j apparaît.

Exercice 24

On veut montrer de deux façons différentes que

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Première méthode. Décomposer $(2n)!$ en séparant les facteurs pairs des facteurs impairs :

$$(2n)! = (1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1))(2 \times 4 \times \cdots \times 2n).$$

Simplifier ensuite le produit des facteurs pairs.

Deuxième méthode – Indication 1. Démontrer directement l'égalité par récurrence sur n .

Deuxième méthode – Indication 2. Pour l'hérédité, remarquer que

$$\prod_{k=0}^n (2k+1) = (2n+1) \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

Utiliser alors l'hypothèse de récurrence et faire apparaître $(2n+2)!$.

Exercice 27

1. On cherche à calculer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Indication 1. Pour $k \geq 1$, simplifier l'expression

$$k \binom{n}{k}$$

à l'aide de la définition des coefficients binomiaux.

Indication 2. Faire apparaître un coefficient binomial de la forme

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Indication 3. Effectuer ensuite le changement d'indice $j = k - 1$ et utiliser la formule du binôme de Newton.

2. On cherche à calculer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 2^k.$$

Indication 1. Utiliser à nouveau la transformation de

$$k \binom{n}{k}$$

obtenue dans la question précédente.

Indication 2. Après le changement d'indice $j = k - 1$, faire apparaître une somme de la forme

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^j.$$

Indication 3. Utiliser le binôme de Newton avec des valeurs bien choisies de a et b .

3. On cherche à calculer

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Indication 1. La difficulté est le facteur

$$\frac{1}{k+1}.$$

Essayer de faire apparaître un coefficient binomial ayant $k+1$ comme indice inférieur.

Indication 2. Comparer

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

et

$$\binom{n+1}{k+1}.$$

Indication 3. Une fois la transformation effectuée, faire le changement d'indice

$$j = k + 1.$$

La somme obtenue ressemble alors presque exactement à une somme issue du binôme de Newton.

Indication 4. Attention : après le changement d'indice, la somme ne commence pas à $j = 0$. Il faudra donc retirer un terme à la somme complète donnée par le binôme de Newton.