Correction du TD 3 : Récurrences, sommes et produits

Table des matières

1 Exercice 1

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n > 0.$

Initialisation : Pour $n = 0, \quad u_0 = 2 \quad$ et $\quad 2 > 0.\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad u_{n+1} = 5u_n + 4.$
Or par hypothèse de récurrence $\quad u_n > 0, \quad$ donc

$$u_{n+1} = 5u_n + 4 > 5 \times 0 + 4 = 4 > 0.$$

Donc $u_{n+1} > 0$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

2 Exercice 2

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n = (-4)^{n+1} + 1.$

Initialisation : Pour $n = 0, \quad u_0 = -3 \quad$ et $\quad (-4)^{0+1} + 1 = -4 + 1 = -3.\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad u_{n+1} = 5 - 4u_n$ et donc on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 - 4u_n \\ &= 5 - 4 \times \big((-4)^{n+1} + 1\big) \qquad \text{par hypothèse de récurence} \\ &= 5 + (-4)^{n+2} - 4 \\ &= (-4)^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = (-4)^{n+1+1} + 1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-4)^{n+1} + 1.$$

3 Exercice 3

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$

Initialisation : Pour $n = 0, \quad u_0 = \frac{1}{2} \quad$ et $\quad 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1.\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$
Or par hypothèse de récurrence $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1, \quad$ donc par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1.$$

Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

4 Exercice 4

1. Je calcule les termes grâce à la formule de récurrence :

$$u_2 = 2u_1 - u_0 - 2 = 2 \times 1 - 1 - 2 = -1 \quad \text{et} \quad u_3 = 2u_2 - u_1 - 2 = 2 \times (-1) - 1 - 2 = -5.$$

2. **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_{n+1} \leqslant u_n.$

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad u_{0+1} = u_1 = 1 \quad$ et $\quad u_0 = 1$. $\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $\quad u_{n+1} \leqslant u_n, \quad$ i.e. $-u_n \leqslant -u_{n+1}$. $\quad$ Alors

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \leqslant 2u_{n+1} - u_{n+1} - 2 \leqslant u_{n+1} - 2 \leqslant u_{n+1}.$$

Donc $u_{n+1+1} \leqslant u_{n+1}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5 Exercice 5

Notons pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{P}(n)$: « $2^n > n + 1$ ».

Initialisation $(n = 3)$ $\quad 2^3 = 8$ et $3 + 1 = 4$ donc $2^3 > 3 + 1$ ainsi $\mathcal{P}(3)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a, par hypothèse de récurrence :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2(n + 1)$$

Or $2(n + 1) = 2n + 2 > n + 2$. On a donc bien $2^{n+1} > n + 2$. Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 3$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 3$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad 2^{n+1} > n + 1.$$

6 Exercice 6

Soit $x \in [-1, +\infty[$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n :« $(1 + x)^n \geqslant 1 + xn$ ».

Initialisation : $(1 + x)^0 = 1$ et $1 + x \times 0 = 1$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on suppose que P_n est vraie. Alors, comme $1 + x$ est positif, on peut multiplier l'inégalité par $1 + x$:

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &\geqslant 1 + xn \\ (1 + x)^{n+1} &\geqslant (1 + xn)(1 + x) \\ (1 + x)^{n+1} &\geqslant 1 + xn + x + x^2 n\end{aligned}$$

Comme $x^2 n$ est positif, on a

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant 1 + xn + x = 1 + x(n + 1)$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + xn$.

On a bien montré que :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geqslant 1 + xn$$

7 Exercice 7

1. **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\frac{0^2(0 + 1)^2}{4} = 0$. $\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

   Par hypothèse de récurrence, je sais que $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\ &= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\ &= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Alors
$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

8 Exercice 8

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0 \times (0+1) \times (0+2)}{3} = 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=0}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+1+1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2) \times \left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= (n+1)(n+2) \times \frac{n+3}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3}$.

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

9 Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$ ».

Initialisation $(n = 0)$ On a, d'une part, : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k \times k! = 0$ et $(0+1)! - 1 = 0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k \times k! &= \sum_{k=0}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)!(1 + n + 1) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

10 Exercice 10

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{1 \times (1+3)}{4 \times (1+1) \times (1+2)} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} &= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^3+2n^2+n+4n^2+8n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+1+3)}{4(n+1+1)(n+1+2)}$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n=1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

11 Exercice 11

1. On a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2\times 1 - 1 = 1, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 1 + 2\times 2 - 1 = 4,$$
$$S_3 \sum_{k=1}^{3}(2k-1) 4 + 2\times 3 - 1 = 9, \quad S_4 = \sum_{k=1}^{4}(2k-1) = 9 + 2\times 4 - 1 = 16$$

2. On conjecture que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n^2$. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation $(n=1)$ On a $S_1 = 1$ et $1^2 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1\\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= (n+1)^2 \quad \text{en reconnaissant une identité remarquable}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n=1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, i.e. $S_n = n^2$.

3. On peut utiliser la propriété de linéarité de la somme pour calculer cette somme directement, on a :

$$\begin{aligned}S_n &= 2\sum_{k=1}^{n} k - n\\ &= 2\times\frac{n(n+1)}{2} - n\\ &= n(n+1) - n\\ &= n(n+1-1)\\ &= n^2\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

12 Exercice 13

1. Montrons le résultat par récurrence et posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 2$.

   Initialisation $(n = 0)$ On a $u_0 = 3$ donc u_0 existe et $u_0 > 2$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 2$ donc $u_n + 1 \neq 0$ ainsi u_{n+1} existe bien. Calculons $u_{n+1} - 2$, on a :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \frac{3u_n - 6}{u_n + 1}.$$

   Or $u_n > 2$ donc $u_n + 1 > 3 > 0$ et $3u_n - 6 > 3 \times 2 - 6 = 0$ donc $u_{n+1} - 2 > 0$ soit $u_{n+1} > 2$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

2. D'après la question 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 2$ donc $u_n - 2 \neq 0$ ainsi v_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} \\
&= \frac{1}{\frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} \\
&= \frac{u_n + 1}{3u_n - 6} - \frac{1}{u_n - 2} \\
&= \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} \\
&= \frac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{3 - 2} = 1$.

4. On en déduit alors son expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + n \times \frac{1}{3} = \frac{n+3}{3}$.

5. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ et que $v_n \neq 0$ donc $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$ soit :

$$u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 + \frac{3}{n+3} = \frac{2n+9}{n+3}.$$

13 Exercice 17

1. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 8 \sum_{k=0}^{n} k + 2 \sum_{k=0}^{n} 1 \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= 8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) \\
&= (n+1)(4n+2) \\
&= 2(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 4\sum_{k=0}^{n} k^2 - 4\sum_{k=0}^{n} k - 2\sum_{k=0}^{n} 1 \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1)\\
&= 2(n+1)(\frac{n(2n+1)}{3} - n - 1)\\
&= 2(n+1)\frac{2n^2+n-3n-3}{3}\\
&= 2(n+1)\frac{2n^2-2n-3}{3}
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{1}{5} \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}\\
&= \frac{1}{5} \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}}\\
&= \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 3\sum_{k=3}^{n+2}\left(\frac{3^2}{2}\right)^k\\
&= 3\sum_{k=3}^{n+2}\left(\frac{9}{2}\right)^k\\
&= 2 \times \left(\frac{9}{2}\right)^3 \times \frac{1-\left(\frac{9}{2}\right)^{n+2-3+1}}{1-\frac{9}{2}}\\
&= \frac{9^3}{2^2} \times \frac{1-\left(\frac{9}{2}\right)^n}{-\frac{7}{2}}\\
&= \frac{9^3}{2\times 7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^n - 1\right)\\
&= \frac{729}{14}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} 3^k \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{1-3^{n+1}}{1-3}\\
&= 2^{n+1} - 1 + \frac{3^{n+1}-1}{2}\\
&= \frac{2^{n+2} - 3 + 3^{n+1}}{2}
\end{aligned}$$

6. On a :

$$S_n = 7(2n+1-n+1) = 7(n+2).$$

7. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 8\sum_{i=3}^{50} i + 6\sum_{i=3}^{50} 1 \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= 8 \times \frac{(50-3+1)(3+50)}{2} + 6(50-3+1) \quad \text{en utilisant la formule de la somme des termes}\\
&\qquad \text{d'une suite arithmétique pour la première somme}\\
&= 8 \times \frac{48 \times 53}{2} + 6 \times 48\\
&= 48(4 \times 53 + 6)\\
&= 48(212+6)\\
&= 48 \times 218\\
&= 10464
\end{aligned}$$

8. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{2n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\\
&= \frac{2n(2n+1)(2(2n)+1)}{6} - \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}\\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)-(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= n \times \frac{2(2n+1)(4n+1)-(n-1)(2n-1)}{6}\\
&= \frac{n(14n^2+15n+1)}{6}
\end{aligned}$$

14 Exercice 25

1. Montrons le résultat par récurrence. Posons pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}(j)$: « $\ln\left(\prod_{k=1}^{j} a_k\right) = \sum_{k=1}^{j} \ln(a_k)$ ».

Initialisation $(j=1)$ D'une part, $\ln\left(\prod_{k=1}^{1} a_k\right) = \ln(a_1)$ et d'autre part $\sum_{k=1}^{1} \ln(a_k) = \ln(a_1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$, supposons $\mathcal{P}(j)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{k=1}^{j+1} a_k\right) &= \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{j} a_k\right) \times a_{j+1}\right) \quad \text{d'après la propriété de la fonction logarithme}\\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{j} a_k\right) + \ln(a_{j+1}) \quad \text{d'après la propriété de la fonction logarithme}\\
&= \sum_{k=1}^{j} \ln(a_k) + \ln(a_{j+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \sum_{k=1}^{j+1} \ln(a_k)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. En particulier, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on obtient le résultat demandé.

2. Montrons le résultat par récurrence. Posons pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}(j)$: « $\exp\left(\sum_{k=1}^{j} \alpha_k\right) = \prod_{k=1}^{j} \exp(\alpha_k)$ ».

Initialisation $(n=1)$ On a d'une part : $\exp\left(\sum_{k=1}^{1} \alpha_k\right) = \exp(\alpha_1)$ et d'autre part $\prod_{k=1}^{1} \exp(\alpha_k) = \exp(\alpha_1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, supposons $\mathcal{P}(j)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{j} \alpha_k + \alpha_{j+1}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{j} \alpha_k\right) \times \exp(\alpha_{j+1}) \quad \text{par propriété de la fonction exponentielle} \\
&= \prod_{k=1}^{j} \exp(\alpha_k) \times \exp(\alpha_{j+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \prod_{k=1}^{j+1} \exp(\alpha_k)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. En particulier, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on obtient le résultat demandé.

3. D'après les questions précédentes, on a :

$$R_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

et

$$S_n = \ln\left(\prod_{k=2}^{n} k\right) = \ln(n!)$$