# Récurrences, sommes et produits

### Exercice 1 (♣)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = 5u_n + 4.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

### Exercice 2 (♣)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = 5 - 4u_n.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

### Exercice 3 (♣)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

### Exercice 4 (♣)

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2.$$

1. Calculer $u_2$ et $u_3$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

### Exercice 5 (♥)

Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \quad 2^n > n+1.$$

### Exercice 6 (♠)

Démontrer l'inégalité de Bernoulli :
$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

### Exercice 7 (♥)

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

### Exercice 8 (♥)

Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

### Exercice 9 (♥)

Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

### Exercice 10 (♦)

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

### Exercice 11 (♥)

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(S_n)$.
2. Conjecturer une formule simple pour $S_n$ et la démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Retrouver le résultat par une autre méthode.

### Exercice 12 (♦)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 - 2. \end{cases}$$
Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}.$$

### Exercice 13 (♥)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n > 2$.

2. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}.$$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ existe.

3. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique.
4. En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
5. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 14 (♠)**

Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2!4!\dots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

**Exercice 15 (♠)**

Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $p \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

**Exercice 16 (♠)**

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

**Exercice 17 (♥)**

Pour $n$ dans $\mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (8k+2)$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (4k^2 - 4k - 2)$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{5^{k+1}}$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} \frac{3^{2k+1}}{2^k}$
5. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k + 3^{2k})$
6. $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} 7$
7. $S_n = \displaystyle\sum_{i=3}^{50} (8i+6)$
8. $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k^2$

**Exercice 18 (♣)**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 2$. Notons $u_n$ le nombre de poignées de main lorsque $n$ personnes se serrent la main.

1. Calculer $u_2$, $u_3$, $u_4$ et $u_5$.
2. Démontrer par récurrence sur $n$ que :

$$\forall n \geq 2 \quad u_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Exercice 19 (♣)**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

**Exercice 20 (♣)**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$.
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1).$$

**Exercice 21 (♠)**

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

**Exercice 22 (♠)**

On pose $a_{i,j} = \min(i,j)$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.
Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$.

**Exercice 23 (♠)**

Calculer les sommes suivantes :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$
2. Soit $n \geq 2$, $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$

**Exercice 24 (♠)**

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer de deux façons différentes que

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

**Exercice 25 (♥)**

1. Soient $a_1$, $a_2$, $\dots a_n$ $n$ éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$
2. Soient $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\dots \alpha_n$ $n$ éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que :
$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\alpha_k}.$$
3. Application : donner une expression en fonction de $n$ de $R_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$ et de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

**Exercice 26 (♣)**

Calculer les sommes suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$ pour la question 2.)

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$
2. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}}$

**Exercice 27 (♠)**

Calculer pour tout $n \geq 2$, les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 2^k$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !