

Exemples de suites réelles

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 10

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

On cherche à obtenir une relation de récurrence ne faisant intervenir que la suite (u_n) .

Indication 1. À partir de

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n,$$

exprimer v_n en fonction de u_n et u_{n+1} .

Indication 2. Écrire maintenant la première relation de récurrence au rang $n+1$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2v_{n+1}.$$

Utiliser ensuite l'expression de v_{n+1} donnée dans l'énoncé.

Indication 3. Il reste à faire disparaître v_n grâce à l'expression obtenue dans l'indication 1.

On obtient ainsi une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par (u_n) .

Indication 4. Résoudre cette relation à l'aide de son équation caractéristique.

Attention : pour déterminer les deux constantes qui apparaissent, il faut connaître u_0 mais également u_1 .

Calculer u_1 à l'aide des relations données dans l'énoncé.

Indication 5. Une fois u_n déterminé, il n'est pas nécessaire de résoudre une nouvelle relation de récurrence pour (v_n) .

Reprendre simplement

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$$

et isoler v_n .

Exercice 11

On considère

$$u_{n+1} = 2u_n + 3^n$$

et on introduit

$$v_n = \frac{u_n}{3^n}.$$

L'objectif de ce changement de suite est de faire disparaître le terme 3^n de la relation de récurrence.

Indication 1. Pour étudier (v_n) , commencer par calculer

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}}.$$

Remplacer ensuite u_{n+1} à l'aide de la relation de récurrence.

Indication 2. Faire apparaître

$$\frac{u_n}{3^n} = v_n.$$

On doit obtenir une relation de la forme

$$v_{n+1} = av_n + b,$$

où a et b sont deux constantes.

La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique.

Indication 3. Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$v_{n+1} = av_n + b,$$

commencer par chercher le réel ℓ vérifiant

$$\ell = a\ell + b.$$

Indication 4. Introduire alors la suite

$$w_n = v_n - \ell.$$

Montrer que (w_n) est géométrique, puis en déduire v_n .

Indication 5. Une fois v_n déterminé, revenir à la définition

$$v_n = \frac{u_n}{3^n}$$

pour obtenir u_n .

Exercice 13

On considère

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3,$$

et, pour $b \in \mathbb{R}$,

$$v_n = u_n + bn - 1.$$

On cherche à choisir b de façon à ce que la suite (v_n) soit géométrique.

Indication 1. Commencer par réécrire la relation de récurrence afin d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de n .

Indication 2. Calculer ensuite

$$v_{n+1} = u_{n+1} + b(n+1) - 1.$$

Remplacer u_{n+1} à l'aide de la relation obtenue précédemment.

Indication 3. Puisque

$$v_n = u_n + bn - 1,$$

exprimer u_n en fonction de v_n , de n et de b , puis remplacer u_n dans l'expression de v_{n+1} .

Indication 4. Après simplification, l'expression de v_{n+1} contient un terme faisant intervenir n .

Pour que (v_n) soit géométrique, ce terme doit disparaître.

Déterminer b en annulant son coefficient.

Indication 5. Pour la valeur de b ainsi obtenue, la relation devient de la forme

$$v_{n+1} = qv_n.$$

Déterminer alors v_0 , puis le terme général de (v_n) .

Indication 6. Pour terminer, revenir à la relation

$$v_n = u_n + bn - 1$$

afin d'obtenir u_n en fonction de n .

Exercice 15

On cherche les suites **bornées** vérifiant

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Indication 1. Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2.

Écrire son équation caractéristique.

Indication 2. Déterminer les racines de cette équation caractéristique.

En déduire que toutes les suites vérifiant la relation de récurrence sont de la forme

$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n,$$

où A et B sont deux constantes réelles et r_1, r_2 les deux racines obtenues.

Indication 3. On ne cherche pas ici **toutes** les suites vérifiant la relation, mais seulement celles qui sont bornées. Examiner séparément le comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$ des deux termes

$$Ar_1^n \quad \text{et} \quad Br_2^n.$$

Indication 4. Si l'une des deux racines est strictement supérieure à 1, que doit nécessairement valoir le coefficient placé devant la puissance correspondante pour que (u_n) soit bornée ?

Indication 5. Il reste à vérifier que les suites obtenues après cette condition sont effectivement bornées.

Exercice 16

On considère

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^3,$$

et on introduit

$$v_n = \ln(u_n).$$

On admet que v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication 1. Pour déterminer la nature de (v_n) , calculer

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}).$$

Utiliser ensuite la relation

$$u_{n+1} = u_n^3.$$

Indication 2. Utiliser la propriété

$$\ln(a^3) = 3 \ln(a)$$

pour $a > 0$.

On doit alors reconnaître une suite usuelle.

Indication 3. Calculer v_0 , puis en déduire le terme général v_n .

Indication 4. Enfin, puisque

$$v_n = \ln(u_n),$$

appliquer la fonction exponentielle pour retrouver u_n .

Penser à utiliser

$$e^{\ln(u_n)} = u_n.$$