Correction du TD 2 : Suites réelles

Table des matières

1 Exercice 1 2

2 Exercice 2 2

3 Exercice 4 3

4 Exercice 8 3

5 Exercice 9 4

6 Exercice 12 5

7 Exercice 14 6

1 Exercice 1

1. On a :

$$u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$$
$$u_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 100 - 10 + 1 = 91$$

2. On a :

$$u_n + 1 = n^2 - n + 1 + 1 = n^2 - n + 2$$
$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$$

2 Exercice 2

1. Je calcule la différence entre deux termes consécutifs puis j'étudie son signe.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Je calcule la différence entre deux termes consécutifs puis j'étudie son signe.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \\ &= \frac{n((n+1)^2+1)}{n(n+1)} - \frac{(n+1)(n^2+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)^2+n}{n(n+1)} - \frac{n^2(n+1)+n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)^2+n-n^2(n+1)-n-1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)\big((n+1)-n\big)-1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or $n(n+1) \geqslant 1$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, i.e. $u_{n+1} \geqslant u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or $1 + \dfrac{1}{n} > 1$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$ ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Ici je calcule plutôt le quotient entre deux termes consécutifs afin que les puissances se simplifient. C'est possible puisque chaque terme de la suite est strictement positif. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}} = \frac{3^n}{n} \times \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n}.$$

Or dès que $n \geqslant 1$, alors $3n \geqslant n+1$. Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3 Exercice 4

1. La méthode est de montrer que pour tout n, $u_n - 3 \leqslant 0$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - 3 = \frac{3n+1}{n+1} - 3 = \frac{3n+1}{n+1} - \frac{3n+3}{n+1} = \frac{3n+1-3n-3}{n+1} = \frac{-2}{n+1} \leqslant 0.$$
J'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \leqslant 0$, i.e. $u_n \leqslant 3$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée par 3.
2. Je sais déjà que la suite est majorée, donc il ne me reste plus qu'à montrer qu'elle est minorée pour en déduire qu'elle est bornée. En observant le terme u_n, je me rends compte que celui-ci est positif puisque pour tout n,
$$3n+1 \geqslant 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad n+1 \geqslant 1 \geqslant 0.$$
Donc $u_n \geqslant 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. J'obtiens alors que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée.

4 Exercice 8

Il s'agit de suites arithmético-géométriques, on applique donc la méthode du cours pour trouver leur expression en fonction de n.

1. On commence par chercher le réel α vérifiant :
$$\alpha = -2\alpha + 3.$$
On obtient : $\alpha = 1$. On définit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 1$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= -2u_n + 3 - 1 \\ &= -2(v_n + 1) + 2 \\ &= -2v_n - 2 + 2 \\ &= -2v_n. \end{aligned}$$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison -2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (-2)^n$ avec $v_0 = u_0 - 1 = -2 - 1 = -3$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3(-2)^n$. On en déduit l'expression de u_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - 3(-2)^n.$$
2. On commence par chercher le réel α vérifiant :
$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 1.$$
On obtient : $\alpha = -2$. On définit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n + 2$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 2) + 1 \\ &= \frac{1}{2}v_n - 1 + 1 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ avec $v_1 = u_1 + 2 = -1 + 2 = 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. On en déduit l'expression de u_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2.$$

3. Il s'agit toujours d'une suite arithmético-géométrique dont la relation de récurrence peut se réécrire de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

On cherche alors le réel α vérifiant :

$$2\alpha = 3\alpha + 1.$$

On obtient : $\alpha = -1$. On définit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + 1$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2}(v_n - 1) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}v_n - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $\frac{3}{2}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$. On en déduit l'expression de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1.$$

5 Exercice 9

Il s'agit de trois suites récurrentes linéaires d'ordre, on applique la méthode du cours pour trouver leur expression en fonction de n.

1. L'équation caractéristique associée est la suivante :

$$r^2 = -r + 6$$

soit

$$r^2 + r - 6 = 0.$$

Résolvons cette équation, on obtient : $\Delta = 25$ et $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$. Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(-3)^n + \mu(2)^n$.
Il reste à déterminer λ et μ à l'aide des termes $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$. On a le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda(-3)^0 & + & \mu(2)^0 & = & u_0 \\ \lambda(-3)^1 & + & \mu(2)^1 & = & u_1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 2 \\ -3\lambda & + & 2\mu & = & 5 \end{array}\right.$$

On résout le système et on obtient $\lambda = -\frac{1}{5}$ et $\mu = \frac{11}{5}$. En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{-(-3)^n + 11(2)^n}{5}$$

2. Il s'agit toujours d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont la relation de récurrence peut se réécrire comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n.$$

L'équation caractéristique associée est la suivante :

$$4r^2 = 4r - 1$$

soit

$$4r^2 - 4r + 1 = 0.$$

Résolvons cette équation, on obtient une unique solution $r_0 = \dfrac{1}{2}$. Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + n\mu)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Il reste à déterminer λ et μ à l'aide des termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. On a le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & 0 \times \mu & = & u_0 \\ (\lambda & + & \mu) \times \dfrac{1}{2} & = & u_1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & 1 \\ \lambda & + & \mu & = & 4 \end{array}\right.$$

On résout le système et on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 3$. En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1 + 3n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. L'équation caractéristique associée est la suivante :

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Résolvons cette équation, on obtient : $\Delta = 5$ et $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{1}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(x_1)^n + \mu(x_2)^n$.

Il reste à déterminer λ et μ à l'aide des termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On a le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda(x_1)^0 & + & \mu(x_2)^0 & = & 0 \\ \lambda(x_1)^1 & + & \mu(x_2)^1 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ x_1\lambda & + & x_2\mu & = & 1 \end{array}\right.$$

On résout le système et on obtient $\lambda = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\mu = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

6 Exercice 12

1. Grâce à la donnée de u_0 et de la formule de récurrence pour calculer un terme à partir du précédent, je suis capable de calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$u_1 = -2u_0 + 3 \times 0 + 2 = -2 \times 1 + 0 + 2 = -2 + 2 = 0, \qquad u_2 = -2u_1 + 3 \times 1 + 2 = -2 \times 0 + 3 + 2 = 5$$
$$\text{et} \quad u_3 = -2u_2 + 3 \times 2 + 2 = -2 \times 5 + 6 + 2 = -10 + 8 = -2.$$

Maintenant que pour $n \in \{1, 2, 3\}$ je connais les termes u_n, je peux calculer les termes $v_n = u_n - n - \dfrac{1}{3}$:

$$v_1 = u_1 - 1 - \frac{1}{3} = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}, \qquad v_2 = u_2 - 2 - \frac{1}{3} = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$
$$\text{et} \quad v_3 = u_3 - 3 - \frac{1}{3} = -2 - \frac{10}{3} = -\frac{16}{3}.$$

2. Pour montrer que la suite est géométrique, je dois prendre deux termes consécutifs quelconques de la suite et montrer que j'obtiens un terme en multipliant le précédent par une valeur ne dépendant pas de n. En regardant les trois premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ calculés précédemment, je me dis que la raison doit être égale à -2.

Je fixe $n \in \mathbb{N}$ et j'exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - \frac{1}{3} \\ &= -2u_n + 3n + 2 - n - 1 - \frac{1}{3} \\ &= -2u_n + 2n + \frac{2}{3} \\ &= -2\left(v_n + n + \frac{1}{3}\right) + 2n + \frac{2}{3} \\ &= -2v_n - 2n - \frac{2}{3} + 2n + \frac{2}{3} \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai montré que $v_{n+1} = -2v_n$. Il s'agit de la formule de récurrence d'une suite géométrique. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique, de raison $q = -2$.

3. Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, je connais sa formule explicite. Il me suffit de calculer son premier terme : $v_0 = u_0 - 0 - \frac{1}{3} = 1 - 0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3} \times (-2)^n = -\frac{(-2)^{n+1}}{3}.$$

4. Je connais désormais une expression explicite de v_n et l'énoncé me donne une relation entre v_n et u_n. Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - n - \frac{1}{3} \quad \iff \quad u_n = v_n + n + \frac{1}{3} = -\frac{(-2)^{n+1}}{3} + n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1 - (-2)^{n+1}\right) + n.$$

7 Exercice 14

1. Calculons u_1 et u_2, on a :

$$u_1 = \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{19}{12}.$$

On a, d'une part :

$$u_1 - u_0 = \frac{7}{5} - 3 = -\frac{8}{5} \neq u_2 - u_1 = \frac{11}{60}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique. On a, d'autre part :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{15} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{95}{84}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas géométrique.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1 + u_{n+1}}{2 - 2u_{n+1}} \\
&= \frac{1 + \frac{2u_n+3}{u_n+2}}{2 - 2 \times \frac{2u_n+3}{u_n+2}} \\
&= \frac{u_n + 2 + 2u_n + 3}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{2(u_n + 2) - 2(u_n + 3)} \\
&= \frac{3u_n + 3}{-2u_n + 2} \\
&= 3 \times \frac{u_n + 1}{2 - 2u_n} \\
&= 3v_n
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \frac{1 + u_0}{2 - 2u_0} = \frac{4}{-4} = -1$. On en déduit donc pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -3^n.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3^n \in \mathbb{Z}$ donc $v_n \neq -\frac{1}{2}$.

4. Inversons la relation $v_n = \frac{1 + u_n}{2 - 2u_n}$. On a, comme $v_n \neq -\frac{1}{2}$ les équivalences suivantes pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1 + u_n}{2 - 2u_n} \iff (2 - 2u_n)v_n = 1 + u_n \iff (1 + 2v_n)u_n = 2v_n - 1 \iff u_n = \frac{2v_n - 1}{1 + 2v_n}.$$

On en déduit donc l'expression de u_n en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{-2 \times 3^n - 1}{1 - 2 \times 3^n} = \frac{2 \times 3^n + 1}{2 \times 3^n - 1}.$$