Correction partielle du TD 28 : Extrema et convexité

Table des matières

1 Exercice 6

1. La fonction exponentielle est convexe donc par définition de la convexité avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\frac{1}{2} \in [0,1]$, on a :
$$\exp\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}^a}{2}+\frac{\mathrm{e}^b}{2}.$$
2. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est deux fois dérivables sur $]1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ainsi la fonction f est deux fois dérivables sur $]1,+\infty[$. On a : pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ et
$$f''(x) = \frac{-\ln(x)-1}{(x\ln(x))^2}.$$
Or pour tout $x > 1$, $-\ln(x)-1 < 0$ car $-\ln(x)-1<0 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$. De plus, $(x\ln(x))^2 > 0$ pour $x > 1$ donc $f''(x) \leqslant 0$ sur $]1,+\infty[$ donc f est bien concave sur $]1,+\infty[$.
3. On a donc par définition de la concavité et pour $(a,b) \in]1,+\infty[^2$ et $\frac{1}{2} \in [0,1]$, on a :
$$\ln(\ln(\frac{a+b}{2})) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln(a)) + \frac{1}{2}\ln(\ln(b))$$
soit
$$\ln(\ln(\frac{a+b}{2})) \geqslant \ln(\sqrt{\ln(a)}) + \ln(\sqrt{\ln(b)})$$
soit
$$\ln(\ln(\frac{a+b}{2})) \geqslant \ln(\sqrt{\ln(a)\ln(b)})$$
donc par stricte croissance de $\ln$, on a :
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

2 Exercice 7

La fonction $\sin$ est concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ car elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde vaut $-\sin$ qui est négative sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi la courbe de $\sin$ est en dessous de ses tangentes sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Calculons l'équation de sa tangente en 0, on a :
$$y = sin'(0)(x-0)+\sin(0) = x.$$
Ainsi $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin(x) \leqslant x$.

Comme la fonction $\sin$ est concave, sa courbe est au-dessus des ses cordes sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Calculons alors l'équation de la corde reliant les points de sa courbe d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Le coefficient directeur vaut : $\frac{\sin(\frac{\pi}{2})-\sin(0)}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2}{\pi}$. De plus, elle passe par 0 en 0 donc son équation vaut $y = \frac{2}{\pi}x$. Ainsi pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x)$.

3 Exercice 8

1. La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n$ des réels strictement positifs et posons pour $i \in [\![1,n]\!]$, $t_i = \frac{1}{n}$. On a $t_i \in]0,1[$ et $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Ainsi par définition de la concavité, on a :
$$\ln\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^n t_i \ln(a_i)$$
i.e.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)$$

puis en utilisant les propriétés de la fonction $\ln$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\ln(a_1\dots a_n) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

puis

$$\ln\left(\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

puis en appliquant la fonction exponentielle qui est strictement croissante, on obtient :

$$\sqrt[n]{a_1\dots a_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

2. (a) Si $m=0$, l'inégalité est vérifiée car $0!=1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$.

Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Posons pour $i\in[\![1,m]\!]$, $a_i=i>0$. Appliquons l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} i} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} i}{m}$$

donc

$$\sqrt[m]{m!} \leqslant \frac{1}{m}\times\frac{m(m+1)}{2}$$

Appliquons ensuite la fonction $x\mapsto x^m$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$m! \leqslant \left(\frac{m+1}{2}\right)^m.$$

(b) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^*$, posons $a_1=a^3$, $a_2=b^3$ et $a_3=c^3$ et appliquons le résultat de la question 1. pour $n=3$, on obtient :

$$\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

i.e.

$$abc \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

ce qui revient à :

$$3abc \leqslant a^3+b^3+c^3.$$

(c) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^*$, posons $a_1=3a$, $a_2=3b$ et $a_3=3c$ et appliquons le résultat de la question 1. pour $n=3$, on obtient :

$$\sqrt[3]{3a\times 3b\times 3c} \leqslant \frac{3a+3b+3c}{3}$$

i.e.

$$\sqrt[3]{27abc} \leqslant a+b+c$$

Appliquons ensuite la fonction $x\mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$27abc \leqslant (a+b+c)^3.$$

4 Exercice 11

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction polynomiale et d'un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le quotient ne s'annule pas. Posons $u : x\mapsto 1+\mathrm{e}^x$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $u'(x)=\mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}+1 = -\frac{\mathrm{e}^x}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2}+\frac{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{-\mathrm{e}^x+1+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Posons $u : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}\big(1 + \mathrm{e}^x\big)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $u'(x) = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x\big(1 + 2\mathrm{e}^x\big)$ et $v'(x) = 2\mathrm{e}^x\big(1 + \mathrm{e}^x\big)$, alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{e}^x\big(1+2\mathrm{e}^x\big) \times \big(1+\mathrm{e}^x\big)^2 - \big(1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}\big) \times 2\mathrm{e}^x\big(1+\mathrm{e}^x\big)}{\Big(\big(1+\mathrm{e}^x\big)^2\Big)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x\big(1+\mathrm{e}^x\big)\Big(\big(1+2\mathrm{e}^x\big)\big(1+\mathrm{e}^x\big) - 2\big(1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}\big)\Big)}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x\big(1+\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}-2-2\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}\big)}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^3} = \frac{\mathrm{e}^x\big(\mathrm{e}^x-1\big)}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^3} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\quad f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\big(\mathrm{e}^x-1\big)}{\big(1+\mathrm{e}^x\big)^3}$.

(b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $1 + e^x > 1 > 0$ donc $\big(1+e^x\big)^3 > 0$.
Il me reste à étudier le signe de $\big(e^x - 1\big)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant 0.$$

Ainsi on en déduit que :
— f est concave sur l'intervalle $\big]-\infty, 0\big]$, car f'' y est négative,
— f est convexe sur l'intervalle $\big[0, +\infty\big[$, car f'' y est positive.

La courbe $\mathcal{C}$ admet bien un point d'inflexion, de coordonnées $\big(0, f(0)\big) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$,
car $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} + 0 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

(c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f''.
On a déjà étudié le signe de f''. On peut directement établir le tableau de signe de f'' et le tableau de variation de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	

On évalue f' en $x = 0$: $\quad f'(0) = \dfrac{1 + e^0 + e^{2\times 0}}{\big(1+e^0\big)^2} = \dfrac{1+1+1}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$.

On retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du minimum de la fonction f' et ce minimum est positif. On en conclut donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On rappelle que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = +\infty$ Puis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par somme, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = -\infty$.

(b) On connait les limites de f et on sait que la fonction est strictement croissante.
On dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f			$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	

3. (a) On commence par calculer la différence pour $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) - x = \dfrac{1}{1+e^x} + x - x = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Or on a déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question **2.a)** :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(b) On raisonne de la même manière qu'à la question précédente.

On commence par calculer la différence : $\quad f(x) - \big(x+1\big) = \dfrac{1}{1+e^x} + x - x - 1 = \dfrac{1}{1+e^x} - 1$. Or on a déjà calculé la limite de $\dfrac{1}{1+e^x}$ en $-\infty$ à la question **2.a)**. Alors par somme,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \big(x+1\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x+1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

(c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$. On connait déjà $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{3}{4}$.
Ainsi l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

(d) Voici le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$.