Extrema et convexité

Exercice 1 (♣)

Etudier les extrema de la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 2 (♣)

Étudier les extrema de la fonction définie de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$,

$$f(x) = \left(x(x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

Exercice 3 (♦)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a(a+b) > 0$. Étudier les extrema de la fonction définie de $\mathbb{R}_+$dans $\mathbb{R}$par $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \frac{bx}{x^2 + a(a+b)}$$

Exercice 4 (♣)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 5 (♠)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application. On dit que f est log-convexe si l'application $\ln(f)$ est convexe.

1. Montrer que, si f est log-convexe, alors f est convexe.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

Exercice 6 (♥)

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}.$$

2. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1,+\infty[$.
3. En déduire que $\forall (a,b) \in]1,+\infty[^2$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercice 7 (♥)

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 8 (♦)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

2. **Applications**
   (a) Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$m! \leq \left(\frac{m+1}{2}\right)^m.$$

   (b) Montrer que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^*$,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

   et

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc.$$

Exercice 9 (♦)

Soient deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. En utilisant la concavité de l'application $\ln$ montrer que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Soient un entier $n \geq 1$, deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de réels strictement positifs,
   (a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Montrer que

$$\frac{x_j y_j}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{x_j^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p} + \frac{1}{q}\frac{y_j^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}.$$

   (b) En déduire l'inégalité suivante (appelée inégalité de Hölder)

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

Exercice 10 (♣)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe e^{-x^2}. Etudier les points d'inflexion de f.

Exercice 11 (♥)

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + x.$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f.
   Calculer de même la dérivée f'' de f'. Vérifier que pour tout réel x :
   $$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3}$$
   (b) Étudier la convexité de f. Vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.
   (c) Déterminer le sens de variation de f'. Vérifier que $f'(0) = \dfrac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites de f calculées en 2.a).
3. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   (b) Justifier de même que la droite (D') d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
   (c) On note A le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
   (d) Tracer sur une même figure les droites $(D), (D')$ et (T) ainsi que l'allure de la courbe (C).

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !